Probleme propuse[1]

Clasele primare

P283. Scrieţi $+$ sau $-$ în fiecare pătrăţel din $1\square 2\square 3\square 4 = 17\square 1\square 2\square 4$ astfel încât să obţineţi o egalitate. Câte soluţii există? Explicaţi!
(*Clasa I*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

P284. Se consideră şirul de cifre: $0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, \ldots$ De câte ori apare cifra 1 în primele 60 de cifre scrise?
(*Clasa I*) **Teodor Pătraşcu, elev, Iaşi**

P285. Considerăm şirul crescător al numerelor de două cifre cu cifra unităţilor 5. Cât trebuie să adăugăm la suma unităţilor numerelor din şir pentru a obţine numărul din mijlocul lui?
(*Clasa I*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

P286. Refaceţi adunarea $\overline{2**}+\overline{3**} = 678$ ştiind că este cu trecere peste ordinul unităţilor şi al zecilor. Scrieţi toate soluţiile.
(*Clasa a II-a*) **Teodora Pricop, elevă, Iaşi**

P287. Pe un jeton sunt scrise numerele $1, 2, 3, 4, 5$ într-o ordine dată, fără să se repete. Pentru fiecare două numere alăturate se face suma lor. Se adună cele patru rezultate obţinute şi suma lor este ,,codul jetonului". Cum trebuie scrise numerele pentru a obţine un jeton cu codul 25? (Este suficient un singur exemplu.)
(*Clasa a II-a*) **Cristina Chelaru, elevă, Iaşi**

P288. Câte numere de două cifre trebuie alese astfel încât să găsim printre ele două numere cu aceeaşi sumă a cifrelor.
(*Clasa a II-a*) **Prof.înv.primar Marian Ciuperceanu, Craiova**

P289. Pentru fiecare şapte mere pe care le culege, un băiat primeşte de la bunicul lui două nuci. Este posibil ca, la un moment dat, băiatul să aibă 234 fructe? Dar 431?
(*Clasa a III-a*) **Denisa Apetrei, elevă, Iaşi**

P290. Un salariat are tichete valorice de $1, 3, 9$ şi 27 lei, cel puţin câte unul de fiecare fel. Cum poate să achite suma de 79 lei utilizând fiecare tichet cel puţin o data?
(*Clasa a III-a*) **Maria Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P291. Un elev trebuie să rezolve 42 de probleme în cinci zile. În fiecare zi rezolvă mai multe probleme decât în ziua precedentă, iar în ziua a patra rezolvă de cinci ori mai multe probleme decât în prima zi. Care este numărul maxim de probleme pe care le poate rezolva în a cincea zi?
(*Clasa a III-a*) **Alexandra-Mădălina Ciobanu, elevă, Iaşi**

P292. Un elev are 11 bile numerotate de la 1 la 11, 11 bile numerotate de la 12 la 22 şi 11 bile numerotate de la 23 la 33. Vom numi *tripletă* orice grupă de trei bile cu numerele scrise pe ele în ordine crescătoare. Câte triplete cu proprietatea că suma numerelor de pe bilele componente este 51 se pot forma?
(*Clasa a III-a*) **Adelin Bechet, elev, Iaşi**

[1]Se primesc soluţii până la data de 1 iunie 2014.

P293. Ştiind că $\overline{xy}+\overline{mn}=35$ şi $\overline{zt}+\overline{uv}=75$, să se afle câtul împărţirii numărului $\overline{xyzt}+\overline{mnuv}$ la 5.

(*Clasa a IV-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

P294. Câte numere de trei cifre au cel puţin una dintre cifre 9?

(*Clasa a IV-a*) **Mariana Manoli, elevă, Iaşi**

P295. Câţiva elevi au organizat o excursie de trei zile. În prima seară dorm câte patru în cameră, în a doua seară câte trei, iar în ultima seară fiecare are camera sa. Ştiind că au fost închiriate 32 de camere în total, iar în a doua seară într-o cameră au fost cazaţi numai doi elevi, să se afle câţi elevi au participat la excursie.

(*Clasa a IV-a*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

P296. Pentru un număr natural n, $n \geq 1$, notăm cu $S(n)$ suma cifrelor numărului n (de exemplu $S(235)=2+3+5=10$). Câte numere de forma $\overline{abc}$ îndeplinesc condiţia $S(S(\overline{abc}))=10$?

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.172. Se consideră numerele naturale $x=2013^{2013}-3$ şi $y=2014^{2013}-4$. Arătaţi că x şi y au cel puţin patru divizori comuni.

Gheorghe Iacob, Paşcani

V.173. Determinaţi numerele naturale m şi n pentru care $2^m+2^n=33554433$.

Ionel Tudor, Călugăreni

V.174. Determinaţi numerele $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc}=c^2(a-1)^2$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.175. Arătaţi că numărul $A=2^{2014}+2^{2013}+2^{2012}+2^3$ se divide cu 15.

Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

V.176. Pe tablă sunt scrise numerele naturale $1,2,3,\ldots,41$. Andrei alege de pe tablă un număr de la 1 la 7. Apoi, Bianca alege un număr mai mare decât cel al lui Andrei, astfel încât diferenţa dintre numărul ales de ea şi cel ales de Andrei este cel mult egală cu 7. Urmează Andrei, care alege un număr mai mare decât cel ales de Bianca, astfel încât diferenţa dintre numărul ales de el şi cel ales de Bianca este cel mult egală cu 7 ş.a.m.d. Elevul care este obligat să aleagă numărul 41 pierde jocul. Arătaţi că Bianca are strategie de câştig.

Radu Miron, elev, Iaşi

V.177. Determinaţi cel mai mic număr natural m (scris în baza 10) cu proprietatea că atât n, cât şi $n+3$, au suma cifrelor numere divizibile cu 7.

Dan Popescu, Suceava

V.178. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care n^3 divide $n!$ (unde $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

Petru Asaftei, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.172. Demonstraţi că nu există numere întregi distincte a,b, şi c pentru care $\{a,b,c\}=\{a-b,b-c,c-a\}$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

VI.173. Fie $a, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, astfel încât la împărţirea lui a cu n se obţine restul $n-1$, iar la împărţirea lui a prin $n+1$ se obţine restul n. Aflaţi restul împărţirii lui a prin $n(n+1)$.

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

VI.174. Demonstraţi că nu există numere naturale a, b şi c având proprietatea că $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

Viorica Momiţă, Iaşi

VI.175. Determinaţi cel mai mare divizor comun al numerelor $a = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{71}$ şi $b = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{48}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.176. Determinaţi cel mai mic număr natural (scris în baza 10) care se termină în 2012 şi se divide cu 2014.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti, şi Neculai Stanciu, Buzău

VI.177. Fie ABC un triunghi cu $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $m(\widehat{B}) = 60°$. Considerăm punctul D astfel încât $CD \| AB$, $CD = AB$, iar B şi D sunt separate de dreapta AC. Arătaţi că există un singur punct $M \in (BC)$ astfel încât $MA \perp MD$.

Petru Asaftei, Iaşi

VI.178. Fie ABC un triunghi în care unghiul $\widehat{BAC}$ este cel mai mare, iar BD şi CE sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$, respectiv $\widehat{ACB}$ ($D \in AC, E \in AB$). Notăm cu I intersecţia dreptelor BD şi CE şi cu F şi G simetricele punctului A faţă de BD, respectiv CE. Arătaţi că $m(\widehat{FIG}) = 180° - m(\widehat{BAC})$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a VII-a

VII.172. Determinaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că $0,3 < \{\sqrt{n}\} < 0,(3)$.

Vasile Chiriac, Bacău

VII.173. Determinaţi numerele naturale n pentru care $5^n - 3^n = 544$.

Ionel Tudor, Călugăreni şi Viorica Dogaru, Giurgiu

VII.174. Pentru a, b, c, d numere reale pozitive, considerăm numerele $A = \dfrac{1}{a+2b+c} - \dfrac{1}{b+2c+d} + \dfrac{1}{c+2d+a} - \dfrac{1}{d+2a+b}$ şi $B = |b-d| - |a-c|$. Demonstraţi că A şi B au acelaşi semn.

Ovidiu Pop, Satu Mare şi Traian Tămîian, Carei

VII.175. Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale pentru care $2^m + 2^n$ este pătrat perfect.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VII.176. Demonstraţi că $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} + \sqrt{\dfrac{xy}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{2}$, oricare ar fi numerele reale pozitive x şi y.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

VII.177. Fie $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ două cercuri de centre O_1, respectiv O_2, având razale egale şi astfel încât $O_1 \in \mathcal{C}_2$. Notăm cu A şi B punctele de intersecţie dintre cele două cercuri şi cu C punctul în care tangenta în A la $\mathcal{C}_1$ taie a doua oară $\mathcal{C}_2$. Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

Dumitru Săvulescu şi Marian Voinea, Bucureşti

VII.178. Se consideră cercul $\mathcal{C}(0, R)$ şi tangentele AB şi AC perpendiculare, duse din punctul A exterior cercului. Paralela prin B la AC taie a doua oară cercul în E, iar AE taie a doua oară cercul în D. Demonstraţi că paralela prin C la BD trece prin mijlocul segmentului OB.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

Clasa a VIII-a

VIII.172. Determinaţi numerele reale x şi y pentru care

$$\{x\}^2 + \{y\}^2 = 0,2 \quad \text{şi} \quad \{-x\}^2 + \{-y\}^2 = 1.$$

Bogdan Chiriac, Bacău

VIII.173. Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(x, y, z) = x^2 + xy + xz + yz$, dacă x, y, z sunt numere reale pozitive cu $xyz(x + y + z) = 1$.

Constantin Dragomir, Piteşti

VIII.174. Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(a, b, c) = \dfrac{(a+b)^2}{3bc+1} + \dfrac{(b+c)^2}{3ca+1} + \dfrac{(c+a)^2}{3ab+1}$, dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu $ab + bc + ca = 3$.

Dan Popescu, Suceava

VIII.175. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, demonstraţi că

$$\frac{1}{(a+b)^2+9} + \frac{1}{(b+c)^2+9} + \frac{1}{(c+a)^2+9} \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Mirela Marin, Iaşi

VIII.176. Fie x, y numere reale pozitive astfel încât $x^3 + y^3 = axy$, cu $a > 0$. Demonstraţi că:

a) $x + y \leq a$; b) $x^2 + y^2 \leq \dfrac{a^2}{2}$.

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache, Craiova

VIII.177. Se consideră prisma triunghiulară dreaptă $ABCDEF$ şi punctul O situat în interiorul ei. Demonstraţi că media aritmetică ponderată a distanţelor de la O la planele (BCE), (ACF), (ABE), (ABC) şi (DEF) cu ponderile a, b, c, p respectiv p, este constantă (unde a, b, c, p notează uzual elementele triunghiului ABC).

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

VIII.178. Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ şi doi diametri perpendiculari AB şi CD. Pe perpendicularele pe planul cercului duse în extremităţile A, B, C, D se iau punctele A', B', C', respectiv D' astfel încât $AA' = BB' = CC' = DD' = R$, A' şi B' să fie de aceeaşi parte a planului cercului, iar C' şi D' de părţi diferite ale lui. Calculaţi în funcţie de R distanţa dintre dreptele $A'B'$ şi $C'D'$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.146. Fie M, N, P, Q mijloacele a patru laturi consecutive ale unui poligon cu $n \geq 4$ laturi. Dacă $MNPQ$ este paralelogram, arătaţi că $n = 4$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

IX.147. Fie M un punct în interiorul patrulaterului convex $ABCD$ astfel încât unghiurile $\widehat{AMB}$ şi $\widehat{CMD}$ sunt neascuţite, iar triunghiurile AMD şi BMC sunt neobtuzunghice. Notăm cu R_1, R_2, R_3 şi R_4 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM, BCM, CDM, respectiv DAM. Dacă $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$, arătaţi că $ABCD$ este romb.

Ovidiu Pop, Satu Mare şi Nicuşor Minculete, Braşov

IX.148. Arătaţi că într-un triunghi oarecare avem: $\cos A \cos B \cos C \leq \dfrac{\sqrt{3}S}{18R^2}$.

Andi Gabriel Brojbeanu, elev, Târgovişte

IX.149. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin: $a_0 = x \in \mathbb{R}$, $3a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 18$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că există o infinitate de valori iraţionale ale lui x pentru care toţi termenii şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ sunt numere naturale.

Radu Miron, elev, Iaşi

IX.150. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ care au proprietatea că $f(1 + f(2)) = f(2 + f(3)) = f(3 + f(4))$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Clasa a X-a

X.146. Pe laturile triunghiului ABC ca baze, se construiesc triunghiurile isoscele asemenea MAB, NAC şi PBC astfel încât M şi N se află în exteriorul triunghiului ABC, iar P se află în interiorul acestuia.

a) Arătaţi că patrulaterul $AMPN$ este paralelogram.

b) Demonstraţi că $AMPN$ este romb dacă şi numai dacă $AB = AC$.

Constantin Dragomir, Piteşti

X.147. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} + \frac{1}{1+5^x} = 1 + \frac{1}{1+30^x}.$$

Marian Cucoaneş, Mărăşeşti

X.148. Determinaţi funcţiile $f : (1, \infty) \to (1, \infty)$ cu proprietatea că $f(x^y) = (f(x))^y$, $\forall x \in (1, \infty)$, $\forall y \in (0, \infty)$.

Ion Nedelcu, Ploieşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

X.149. Afixele vârfurilor unui triunghi echilateral sunt numerele complexe a, b şi c. Considerăm numărul complex $z = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{b-c} + \dfrac{c}{c-a}$. Demonstraţi că partea reală a lui z este $\dfrac{3}{2}$.

Sven Cortel, elev, Satu Mare

X.150. Spunem că o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este *aproape identică* dacă există o funcţie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât $f(f(n)) + g(f(n)) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Dacă funcţia f este aproape identică, arătaţi că funcţia asociată g este definită prin $g(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Daţi exemplu de funcţie aproape identică, alta decât funcţia identică.

c) Demonstraţi că singura funcţie aproape identică şi monotonă este funcţia identică.

Claudiu Mîndrilă, Târgovişte

Clasa a XI-a

XI.146. Dacă x este număr real pozitiv, arătaţi că

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+(x+1)^2} < \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}^2(x+1) - \operatorname{arctg}^2 x\right) < \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{1+x^2}.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

XI.147. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1 > 0, x_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că şirul este convergent şi calculaţi limita sa.

Ovidiu Pop, Satu Mare şi Gheorghe Szöllösy, Sighetu Marmaţiei

XI.148. Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ sunt şiruri de numere reale, $(x_n)_{n\geq 1}$ crescător, astfel încât $nx_{n+2} - (n+1)x_{n+1} \leq y_n \leq nx_{n+1} - (n+1)x_n$, $\forall n \geq 1$, atunci şirul $\dfrac{y_n}{n^2}$ este convergent.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

XI.149. Dreapta $y = kx$, $k > 0$, intersectează hiperbola $xy = a$, $a > 0$, în punctul de abscisă pozitivă X. Tangenta în X la hiperbolă taie axa Ox în punctul Y. Determinaţi valorile lui k pentru care triunghiul OXY este echilateral.

Cătălin Calistru, Iaşi

XI.150. Determinaţi matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cu $A^3 = \begin{pmatrix} 20 & 4 & a \\ -32 & 0 & b \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, ştiind că polinomul $f(X) = \det(XI_3 - A)$ are toate rădăcinile reale.

Mihai Haivas, Iaşi

Clasa a XII-a

XII.146. Se consideră şirul $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{pn}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ este fixat. Demonstraţi că nu există polinoame $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea că $\dfrac{f(n)}{g(n)} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Gabriela Drînceanu şi Răzvan Drînceanu, Craiova

XII.147. Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\sin 4x}}}dx$.

Bogdan Victor Grigoriu

XII.148. Fie $a, b \in [1, \infty)$, $a < b$ şi funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, astfel încât $f(a) = f(b)$. Demonstraţi că

$$\min_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq \frac{2b}{b-a} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Ionuţ Ivănescu, Craiova

XII.149. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $x^7 - 5x^6 + 11x^5 - 15x^4 + 15x^3 - 13x^2 + 5x - 3 = 0$.

Ionel Tudor, Călugăreni

XII.150. Fie G un grup comutativ de ordin 2014 şi $A = \{f_n : G \to G | f_n(x) = x^n, n = \overline{1, 2013}\}$. Determinaţi numărul automorfismelor din A.

Cristian Lazăr, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G256. Fie $p \geq 3$ un număr prim. Arătaţi că numărul $p \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, se scrie în mod unic ca sumă (având măcar doi termeni) de numere naturale consecutive.

Elena Iurea, Iaşi

G257. Fie $a, n \in \mathbb{N}$, a impar şi $n \geq 2$. Aflaţi restul împărţirii numărului a^n prin $\frac{a^2+1}{2}$.

Lucian Tuţescu, Craiova şi Dumitru Săvulescu, Bucureşti

G258. Determinaţi numerele $\overline{abcde}$ (în baza 10), ştiind că $a + b + c = e$ şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{10}{e}$.

Cătălin Calistru, Iaşi

G259. Descompuneţi numărul $5^{2015} - 1$ în produs de trei factori mai mari decât 5^{400}.

Constantin Dragomir, Piteşti

G260. Fie a, b, c şi d numere naturale nenule disctincte, astfel încât numărul $abcd$ să fie pătrat perfect. Demonstraţi că numărul $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ se poate scrie ca sumă de cinci pătrate perfecte nenule.

Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

G261. Determinaţi numerele $x \in [1, \infty)$ cu proprietatea că $[(x-1)^3] = [x-1]^3 = [(x-1)(x-2)(x-3)]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

Alexandru Blaga, Satu Mare

G262. Fie ABC un triunghi, iar D, F şi N mijloacele segmentelor BC, AD respectiv AC. Considerăm punctele $E \in (AB)$ şi $G \in (BD)$ şi notăm $\{M\} = DE \cap FG$. Dacă punctele B, M şi N sunt coliniare, arătaţi că dreptele AD şi EG sunt paralele.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti