a) Demonstraţi că $y_n > \dfrac{2}{2\sqrt{2a+1}+\sqrt{1+4a}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dacă $a \in (0,1)$, arătaţi că, în plus, $y_n < \dfrac{1}{\sqrt{2a}+a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

XI.138. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale monoton şi convergent. Arătaţi că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)^{2013}$ are aceeaşi monotonie cu $(x_n)_{n\geq 1}$ şi este, de asemenea, convergent.

Silviu Boga, Iaşi

XI.139. Dacă $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{pn}} - p\right)$.

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache, Craiova

XI.140. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, arătaţi că $2(\det A)^2 + \det(AB+BA) + 2(\det B)^2 \geq \det(A^2-B^2) + 4\det AB$.

Mihály Bencze, Braşov

Clasa a XII-a

XII.136. Calculaţi $\int \dfrac{x^{2013}+ax^{1006}}{(x^{1007}+b)^{2013}}dx$, $x \in (0,\infty)$, $a, b > 0$.

Cătălin Cristea, Craiova

XII.137. Determinaţi primitivele funcţiei $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos 2011x}{\cos^{2013} x}$.

Liviu Smarandache şi Lucian Tuţescu, Craiova

XII.138. Arătaţi că rădăcinile polinomului $X^3 + aX^2 + bX + c$ sunt în progresie geometrică dacă şi numai dacă $a^3c = b^3$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

XII.139. Pe mulţimea nevidă G se consideră operaţia asociativă ,,·" în raport cu care are loc regula de simplificare la stânga şi astfel încât există $a \in G$ cu $axa = x^3$, $\forall x \in G$. Demonstraţi că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XII.140. Fie $a > 0$ şi cercurile de ecuaţii $\mathcal{C}_1 : (x-a)^2 + y^2 = a^2$ şi $\mathcal{C}_2 : (x+a)^2 + y^2 = a^2$. Determinaţi aria minimă a unei elipse care are drept axe de simetrie axele de coordonate şi este tangentă exterior în câte două puncte la fiecare dintre cercurile date.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G236. Determinaţi numerele naturale a, b, c, d şi e, strict mai mari ca 1, cu proprietatea că $a+b+c+d+e = abcde - 95$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G237. Arătaţi că există n numere naturale distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pentru care suma $a_1 + a_1 + \ldots + a_n$ este pătrat perfect, iar $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ este cub perfect.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G238. Se consideră numerele reale $x, a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Dacă 51 dintre numerele a_1, $\dfrac{a_1+a_2}{2}, \ldots, \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{100}}{100}$ sunt egale cu x, arătaţi că măcar două dintre numerele a_i, $i=\overline{1,100}$, sunt egale cu x.

Cătălin Budeanu, Iaşi

G239. Determinaţi valorile numărului real k, dacă

$$a_1^3+\ldots+a_{2013}^3+4026 \geq k(a_1+\ldots+a_{2013}), \forall a_i \in [-2,\infty).$$

Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Voinea, Bucureşti

G240. Se consideră $E(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + 2\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$, unde $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 16$, cu $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Determinaţi valorile extreme ale acestei expresii.

Petru Asaftei, Iaşi

G241. În triunghiul ABC se consideră cevienele concurente AA', BB' şi CC' astfel încât $A'B \neq A'C$, iar dreptele BC şi $B'C'$ se intersectează în M.

a) Demonstraţi că $\dfrac{2}{MA'} = \left|\dfrac{1}{A'B} - \dfrac{1}{A'C}\right|$.

b) Determinaţi lungimea segmentului MA' în funcţie de laturile triunghiului, atunci când AA' este bisectoare, respectiv înălţime.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

G242. În triunghiul ABC latura AB este fixă, iar lungimea laturii AC este constantă. Fie AA' bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, cu $A' \in BC$. Arătaţi că dreapta perpendiculară în A' pe AA' trece printr-un punct fix.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G243. Fie O intersecţia diagonalelor trapezului $ABCD$, cu baza mare CD. Punctele M şi N sunt astfel încât AD separă M şi O, BC separă N şi O, iar $\triangle MAD \sim \triangle NCB \sim \triangle OAB$. Arătaţi că $BD \cdot AC > AB \cdot MN$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G244. Fie $VABC$ un tetraedru, iar M, N, P mijloacele muchiilor VA, VB respectiv VC. Demonstraţi că

$$2(\mathcal{A}_{MBC}+\mathcal{A}_{NCA}+\mathcal{A}_{PAB}) < \mathcal{A}_{VBC}+\mathcal{A}_{VCA}+\mathcal{A}_{VAB}+3\mathcal{A}_{ABC}.$$

Mihály Bencze, Braşov

G245. Un triunghi echilateral are vârfurile în interiorul sau pe laturile unui hexagon regulat de latură 1 şi nu conţine centrul hexagonului în interiorul său. Care este lungimea maximă posibilă a laturii triunghiului?

Marian Tetiva, Bârlad

B. Nivel liceal

L236. Pe sfera de centru Ω şi rază 7 se consideră punctele A, B, C astfel încât $BC=4$, $CA=5$ şi $AB=6$. Perpendiculara pe planul triunghiului ABC în centrul cercului înscris în acest triunghi intersectează sfera în punctele M şi N. Determinaţi lungimea segmentului MN.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L237. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB ale triunghiului ascuţitunghic ABC. Coarda comună a cercurilor de diametre BB_1 şi CC_1 intersectează B_1C_1 în A_2; construim analog punctele B_2 şi C_2. Demonstraţi că dreptele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 sunt concurente.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L238. Fie R un punct în interiorul triunghiului ABC, iar $\{M\} = AR \cap BC$, $\{N\} = BR \cap AC$, $\{P\} = CR \cap AB$. Notăm cu α, β şi γ măsurile unghiurilor $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, respectiv $\widehat{CPA}$. Dacă $\alpha-\beta+\gamma-C+A$, $-\alpha+\beta+\gamma-B+C$ şi $\alpha+\beta-\gamma-A+B$ se află în intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, arătaţi că R este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Marius Drăgan, Bucureşti

L239. Fie $ABCD$ patrulater circumscriptibil cu $AB \| CD$, iar A', B', C' şi D' sunt punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile AB, BC, CD respectiv DA. Se notează cu A'', B'', C'', D'' simetricele punctelor A', B', C' respectiv D' faţă de mijloacele laturilor pe care se află. Demonstraţi că:

a) $S_{A'B'C'D'} \leq S_{A''B''C''D''}$;

b) $S_{A'B'C'D'} + S_{A''B''C''D''} \leq S_{ABCD}$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L240. Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{2r}{R}\sum \frac{bc}{ab+ac} + \sum \frac{c}{a+b} \leq 3.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L241. Arătaţi că $\dfrac{\sin^3 x}{(1+\sin^2 x)^2} + \dfrac{\cos^3 x}{(1+\cos^2 x)^2} \leq \dfrac{2\sqrt{2}}{9}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (*În legătură cu problema L211 din RecMat-2/2011.*)

Dumitru Barac, Sibiu

L242. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile x, y, z şi diagonala d. Arătaţi că

$$\frac{d^4}{ad^4+bx^4} + \frac{d^4}{ad^4+by^4} + \frac{d^4}{ad^4+bz^4} \leq \frac{27}{9a+b},$$

oricare ar fi $a, b > 0$, $6a \geq 5b$. (*În legătură cu L231 din RecMat-2/2012.*)

Titu Zvonaru, Comăneşti

L243. Pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi inegalitatea

$$\frac{a^m b^m c^m (a^n+b^n+c^n)^2}{a^{3m+2n}+b^{3m+2n}+c^{3m+2n}} \leq 3.$$

(*În legătură cu problema VIII.149 din RecMat-1/2012.*)

Neculai Stanciu, Buzău

L244. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \geq b \geq c$. Demonstraţi că are loc inegalitatea

$$(a^2 + c^2)(ab + ac + bc) - 2ac(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2c(a - b)(a - c)(b - c).$$

Gabriel Dospinescu, Paris şi Marian Tetiva, Bârlad

L245. Fie $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ două funcţii continue astfel încât $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{k} f\left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$. Demonstraţi că cele două funcţii sunt egale.

Florin Stănescu, Găeşti

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G236. Determine the natural numbers a, b, c, d and e, strictly larger than 1, with the property that $a + b + c + d + e = abcde - 95$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G237. Prove that n distinct natural numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ such that the sum $a_1 + a_1 + \ldots + a_n$ is a perfect square and $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ is a perfect cube.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G238. The real numbers $x, a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ are given. If 51 numbers among $a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \ldots, \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}}{100}$ are equal to x, prove that at least two among the numbers a_i, $i = \overline{1, 100}$, are equal to x.

Cătălin Budeanu, Iaşi

G239. Determine the values of the real number k, knowing that

$$a_1^3 + \ldots + a_{2013}^3 + 4026 \geq k(a_1 + \ldots + a_{2013}), \forall a_i \in [-2, \infty).$$

Lucian Tuţescu, Craiova şi Marian Voinea, Bucureşti

G240. Consider the expression $E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i\, x_j$, where $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 16$, with $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Determine the extreme values of this expression.

Petru Asaftei, Iaşi

G241. In the triangle ABC, the concurrent cevian lines AA', BB' and CC' are given, such that $A'B \neq A'C$, and the lines BC aand $B'C'$ meet at point M.

a) Prove that $\frac{2}{MA'} = \left| \frac{1}{A'B} - \frac{1}{A'C} \right|$.

b) Determine the length of the segment MA' as a function of triangles side lengths, in the cases when AA' is an angle-bisector line, respectively the altitude from A.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

G242. In the triangle ABC, the side AB is fixed, and the length of the side AC is constant. Let AA' be the bisector of angle $\widehat{BAC}$, with $A' \in BC$. Show that the perpendicular line at A' on AA' passes through a fixed point.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G243. Let O be the intersection of the diagonals of trapezium $ABCD$, with the big base CD. The points M and N are placed such that AD separates M from O, BC separates N from O, and $\triangle MAD \sim \triangle NCB \sim \triangle OAB$. Show that $BD \cdot AC > AB \cdot MN$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

G244. Let $VABC$ be a tetraahedron, and let M, N, P be the mid-points of the edges VA, VB and respectively VC. Prove that

$$2(\mathcal{A}_{MBC} + \mathcal{A}_{NCA} + \mathcal{A}_{PAB}) < \mathcal{A}_{VBC} + \mathcal{A}_{VCA} + \mathcal{A}_{VAB} + 3\mathcal{A}_{ABC}.$$

Mihály Bencze, Braşov

G245. An equilateral triangle has its vertices inside or on the sides of a regular hexagon of side length $= 1$. The triangle does not contain the centre of the hexagon in its interior. Which is the maximum possible length of triangleş side length?

Marian Tetiva, Bârlad

B. Highschool Level

L236. The points A, B, C are considered on the sphere of centre Ω and radius 7 such that $BC = 4$, $CA = 5$ and $AB = 6$. The perpendicular line on the plane of triangle ABC in the centre of the circle inscribed in this triangle intersects the sphere at the points M and N. Determine the length of the line segment MN.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L237. Let A_1, B_1, C_1 be the mid-points of the sides BC, CA and respectively AB of the acute-angled triangle ABC. The common chord of the circles of diameters BB_1 and CC_1 intersect the line B_1C_1 at A_2; we build in a similar way the points B_2 and C_2. Prove that the lines A_1A_2, B_1B_2 and C_1C_2 are concurrent.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L238. Let R be a point in the interior of triangle ABC, and $\{M\} = AR \cap BC$, $\{N\} = BR \cap AC$, $\{P\} = CR \cap AB$. We note with α, β and γ the measures of the angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, respectively $\widehat{CPA}$. If $\alpha - \beta + \gamma - C + A$, $-\alpha + \beta + \gamma - B + C$ and $\alpha + \beta - \gamma - A + B$ fall in the interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, show that R is the centre of the circle inscribed in the triangle ABC.

Marius Drăgan, Bucureşti

L239. Let $ABCD$ be a circumscrible quadrilateral with $AB \| CD$, while A', B', C' and D' are the tangency (or contact) points of the inscribed circle with the sides AB, BC, CD, respectively DA. Let A'', B'', C'', D'' be the symmetric points of A', B', C', repectively D' with respect to the mid-points of the sides they lie on. Show that:

a) $S_{A'B'C'D'} \leq S_{A''B''C''D''}$;

b) $S_{A'B'C'D'} + S_{A''B''C''D''} \leq S_{ABCD}$.

Marius Olteanu, Rm. Vâlcea

L240. Prove that the following inequality holds in any triangle:

$$\frac{2r}{R}\sum\frac{bc}{ab+ac}+\sum\frac{c}{a+b}\leq 3.$$

Marian Tetiva, Bârlad

L241. Show that $\dfrac{\sin^3 x}{(1+\sin^2 x)^2}+\dfrac{\cos^3 x}{(1+\cos^2 x)^2}\leq\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (Related to the problem *L211 of RecMat-2/2011.*)

Dumitru Barac, Sibiu

L242. A right-angled parallelepiped has the dimensions (edge lengths) x, y, z and the diagonal length d. Show that

$$\frac{d^4}{ad^4+bx^4}+\frac{d^4}{ad^4+by^4}+\frac{d^4}{ad^4+bz^4}\leq\frac{27}{9a+b},$$

any would be $a, b>0$, $6a\geq 5b$. (Related to the problem *L231 of RecMat-2/2012.*)

Titu Zvonaru, Comăneşti

L243. For $m, n\in\mathbb{N}^*$ and $a, b, c\in\mathbb{R}_+^*$, prove the inequality

$$\frac{a^m b^m c^m(a^n+b^n+c^n)^2}{a^{3m+2n}+b^{3m+2n}+c^{3m+2n}}\leq 3.$$

(Related to the problem *VIII.149 of RecMat-1/2012.*)

Neculai Stanciu, Buzău

L244. Let a, b, c be positive real numbers with $a\geq b\geq c$. Prove that the following inequality holds:

$$(a^2+c^2)(ab+ac+bc)-2a(a^2+b^2+c^2)\geq 2c(a-b)(a-c)(b-c).$$

Gabriel Dospinescu, Paris şi Marian Tetiva, Bârlad

L245. Let $f, g:[0,1]\to[0,1]$ be two continuous functions with the property that $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{1}{k}f\left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, $\forall k, n\in\mathbb{N}^*$, $k\leq n$. Prove that the two functions are equal.

Florin Stănescu, Găeşti
