Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.255. Dorina are un număr de mere egal cu cel mai mare număr scris cu o cifră. Eu aş avea cât Dorina, dacă aş mai avea 2 mere. Câte mere am eu?
(*Clasa I*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.256. Doamna învăţătoare a scris pe tablă şase litere m, şase litere i şi şase litere n. Câte bastonaşe a folosit doamna învăţătoare pentru scrierea acestor litere?
(*Clasa I*) **Dumitriţa Grigoriu, elevă, Iaşi**

P.257. Completaţi căsuţele goale din şirul $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square$.
(*Clasa I*) **Mihaela Buleandră, elevă, Iaşi**

P.258. Aflaţi numerele a, b, c şi d, ştiind că $a - 18 = b - 15 = c - 8 = b - c - 1$.
(*Clasa a II-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

P.259. Fie şirul de numere $1, 2, 3, \ldots, 12$. Se formează grupe de câte trei numere luate din acest şir. Câte dintre grupe pot avea suma numerelor egală cu 30?
(*Clasa a II-a*) **Ionuţ Airinei, elev, Iaşi**

P.260. Bomboanele dintr-o pungă se împart la cinci copii. Fiecare copil primeşte cel mult patru bomboane şi cel mult trei copii au acelaşi număr. Care este cel mai mic număr posibil de bomboane din pungă?
(*Clasa a II-a*) **Alexandra Tololoi, elevă, Iaşi**

P.261. Scrieţi numărul 66 ca sumă de numere naturale al căror produs este tot 66. Câte soluţii are problema? (Nu se va ţine seama de ordinea termenilor.)
(*Clasa a III-a*) **Monica Răileanu, elevă, Iaşi**

P.262. Arătaţi că un pătrat din carton poate fi împărţit, fără pierdere de material, în 31 de pătrate.
(*Clasa a III-a*) **Andreea Simona Simion, elevă, Iaşi**

P.263. Tatăl termină o lucrare în 10 ore, iar fiul în 15 ore. În câte ore termină lucrarea cei doi, dacă lucrează împreună?
(*Clasa a III-a*) **Paula Balan, elevă, Iaşi**

P.264. Dacă extragem o coală dintr-un ziar, observăm că suma celor patru numere care indică paginile este 50. Puteţi spune cu ce numere este paginată coala din mijloc?
(*Clasa a III-a*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

P.265. Fie numerele nenule a, b, c, d astfel încât $a + b = 18$, $b + c = 14$, $c + d = 10$. Calculaţi suma $5a + 6b + 8c + 7d$.
(*Clasa a IV-a*) **Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

P.266. Maria are astăzi de şase ori vârsta pe care o avea când fratele ei, Alexandru, avea vârsta ei actuală. Când ea va avea vârsta de azi a fratelui ei, cei doi vor avea împreună 27 de ani. Ce vârstă are acum Maria?
(*Clasa a IV-a*) **Irina Căpraru, Iaşi**

[1] Se primesc soluţii până la data de 15 iunie 2013.

P.267. Pentru un grup de copii s-au adus de trei ori mai multe mandarine decât portocale. Fiecare copil trebuia să primească 2 portocale şi 5 mandarine, însă din greşeală doi copii au primit câte o mandarină în plus. Ştiind că au rămas 19 portocale şi 92 mandarine, să se afle câţi copii sunt în grup.
(*Clasa a IV-a*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

P.268. Pe o foaie sunt scrise numerele de la 1 la 20. Să se arate că nu pot fi formate, din cele 20 de numere, grupe de câte patru numere astfel încât în fiecare grupă suma a două numere să fie triplul sumei celorlalte două.
(*Clasa a IV-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

Clasa a V-a

V.158. Determinaţi restul împărţirii numărului 201220132014 la 36 (fără a efectua împărţirea).

Iulian Oleniuc, elev, Iaşi

V.159. Determinaţi numerele $\overline{xyz}$ cu proprietatea că $(x+y+z)^3 = \overline{xyz}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.160. Determinaţi ultimele două cifre ale numărului $A = 3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{2013}$.

Mirela Marin, Iaşi

V.161. Se consideră numerele raţionale (nenegative) a, b, c, d şi e cu proprietatea că $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = 4$. Demonstraţi că $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3 \leq 8$.

Mihai Crăciun, Paşcani

V.162. Vom spune că un număr este *isteţ* dacă cifra unităţilor sale este egală cu suma cuburilor celorlalte cifre. Dacă ordonăm crescător numerele isteţe, determinaţi al cincisprezecelea termen al şirului obţinut.

Silviu Boga, Iaşi

V.163. Putem aşeza pe un cerc numerele $1, 2, 3, \ldots, n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) astfel încât suma oricăror trei numere alăturate să fie număr impar?

Gheorghe Iurea, Iaşi

V.164. Scriem toate numerele naturale de trei cifre pe câte un cartonaş şi introducem cele 900 de cartonaşe într-o cutie. Care este numărul minim de cartonaşe pe care trebuie să le extragem, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că vom obţine cel puţin şapte numere cu aceeaşi sumă a cifrelor?

Sergiu Prisacariu, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.158. Determinaţi perechile de numere întregi (x, y) care verifică simultan condiţiile $x + y = 6$ şi $2xy - 3x - 3y + 2 = 0$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

VI.159. Determinaţi numerele întregi a, b, c, d, dacă $3^a + 3^b + 3^c + 3^d = 10$.

Vasile Chiriac, Bacău

VI.160. Împărţind 2013 la a, obţinem câtul b şi restul c. Determinaţi numerele naturale a, b şi c, ştiind că reprezintă lungimile laturilor unui triunghi isoscel.

Ioana Maria Popa, elevă, Iaşi

VI.161. Determinaţi valorile naturale ale lui n pentru care există numărul natural x astfel încât $(2x+9, 3x+1) = 5^n$.

Gheorghe Iacob, Paşcani

VI.162. Un calculator defect mai face doar patru operaţii: poate înmulţi un număr cu 2 sau cu 5 sau poate împărţi un număr la 2 sau la 5, dacă împărţirea se efectuează exact. Un copil pleacă de la numărul 20 şi face aleator 2013 astfel de operaţii. Este posibil ca rezultatul final să fie tot 20?

Petre Bătrâneţu, Galaţi

VI.163. Fie M şi N mijloacele laturilor AB, respectiv AC ale triunghiului ABC. Cercul de diametru AB intersectează dreapta MN în punctele D şi E. Demonstraţi că BD şi BE sunt bisectoarele (interioară şi exterioară) ale unghiului $\widehat{ABC}$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

VI.164. Pe laturile AC şi AB ale triunghiului ABC se consideră punctele E, respectiv F astfel încât $m(\widehat{ABE}) < m(\widehat{CBE})$ şi $m(\widehat{ACF}) < m(\widehat{BCF})$. Fie D un punct pe latura BC şi $G \in (AB)$, $H \in (AC)$ pentru care $DG \perp BE$ şi $DH \perp CF$. Demonstraţi că $AG + AH > AB + AC - BC$.

Petru Asaftei, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.158. Determinaţi numerele naturale m cu proprietatea că $m(m+17)$ se poate scrie ca produs de două numere naturale consecutive.

Lucian Tuţescu şi Petrişor Rocşoreanu, Craiova

VII.159. Dacă m, n, p sunt numere reale astfel încât $m^2+n^2+p^2 = 3$, demonstraţi că $\sqrt{2m^2+5} + \sqrt{2n^2+5} + \sqrt{2p^2+5} \leq 3\sqrt{7}$.

Mihai Crăciun, Paşcani

VII.160. Determinaţi triunghiurile dreptunghice cu lungimile laturilor exprimate prin numere naturale, care au aria egală cu 24.

Neculai Stanciu, Buzău

VII.161. Se consideră trapezul $ABCD$ cu baza mare AB egală cu diagonala AC. Fie $\{E\} = AD \cap BC$, $\{O\} = AC \cap BD$, iar $P \in (AD)$ este astfel încât $OP \| AB$. Demonstraţi că CP şi CE sunt bisectoarele interioară, respectiv exterioară ale unghiului $\widehat{ACD}$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

VII.162. Demonstraţi că diagonala unui trapez isoscel este mai lungă decât linia mijlocie a acestuia.

Nicolae Bourbăcuţ, Sarmizegetusa

VII.163. Fie D un punct pe latura BC a triunghiului ABC. Paralela prin D la AC taie AB în E, iar paralela prin D la AB taie AC în F. Dacă $\{M\} = CE \cap BF$, arătaţi că suprafeţele $AEMF$ şi BMC sunt echivalente.

Dan Popescu, Suceava

VII.164. Fie $ABCD$ un patrulater convex, ale cărui diagonale se intersectează în O. Dacă oricare ar fi punctele $E \in (AB$ şi $F \in (CD$ cu $AE = CF$, avem că $O \in EF$, demonstraţi că $ABCD$ este paralelogram.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.158. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\dfrac{27x^3 + 54x + 15}{98x^2 - 84x + 10} = \dfrac{147x^2 - 126x + 24}{18x^2 + 36x + 16}$.

Constantin Dragomir, Piteşti

VIII.159. Demonstraţi că $1 + 3x + 6x^2 + 9x^3 + 9x^4 > \dfrac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ionel Tudor, Călugăreni

VIII.160. Se consideră dreapta fixă d, punctul fix $A \notin d$ şi planul variabil α care conţine dreapta d. Notăm cu M proiecţia punctului A pe planul α. Determinaţi locul geometric al lui M.

Aida-Andreea Iacob, Iaşi

VIII.161. Se dau zece cutii cubice cu muchiile de 1 cm, 2 cm, ..., 10 cm, fiecare fiind umplută cu cuburi de muchie 1 cm. Spunem că p cutii formează un *bicub* dacă una dintre ele conţine tot atâtea cuburi câte conţin celelalte $p - 1$ la un loc. Putem forma un bicub folosind câteva dintre cutiile date?

Geanina Hăvârneanu, Iaşi

VIII.162. Determinaţi ultimele trei cifre ale numărului natural $A = 373^3 + 374^3 + 375^5 + \ldots + 628^3$.

Mihai Haivas, Iaşi

VIII.163. Determinaţi valorile întregi ale lui m pentru care numărul $\sqrt{\dfrac{4m+3}{m-5}}$ este raţional.

Bogdan Chiriac, Bacău

VIII.164. Fie a, b, c, d patru numere reale strict pozitive astfel încât $ab(c + d) \geq (a + b)cd$ şi $ab + cd \geq (a + b)(c + d)$. Comparaţi numerele $a + b$ şi $c + d$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Clasa a IX-a

IX.136. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a \cdot b \cdot c = 1$. Demonstraţi că

$$\frac{ab}{b^2 + c^2} + \frac{bc}{c^2 + a^2} + \frac{ca}{a^2 + b^2} \geq \frac{9}{a^3 + b^3 + c^3 + a + b + c}.$$

Sven Cortel şi Kinga Raţiu, elevi, Satu Mare

IX.137. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Notăm cu H_1, H_2, H_3 şi H_4 ortocentrele triunghiurilor DAB, ABC, BCD respectiv CDA şi cu G_1, G_2, G_3 şi G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor AH_1B, BH_2C, CH_3D respectiv DH_4A. Demonstraţi că patrulaterele $ABCD$ şi $G_1G_2G_3G_4$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $ABCD$ este dreptunghi.

Florin Stănescu, Găeşti

IX.138. Fie M un punct variabil în interiorul sau pe laturile triunghiului ascuţitunghic ABC. Arătaţi că $MB^2 + MC^2 - MA^2 \leq AB^2 + AC^2$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.139. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $m(\widehat{C}) = 30°$. Fie O şi F picioarele medianei, respectiv înălţimii din A, iar E este un punct astfel încât $F \in (AE)$, $FE = FB$. Notăm cu M simetricul lui A faţă de E şi cu D intersecţia dreptelor MO şi AC. Demonstraţi că $CO = CD$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

IX.140. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care

$$(x+y)^n - (x^n + y^n) = nxy(x+y)(x^2+xy+y^2)^{\frac{n-3}{2}},\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ionel Tudor, Călugăreni

Clasa a X-a

X.136. Fie numerele naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geq 2$. Determinaţi numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_n$, de modul 1, cu proprietatea că $\sum\limits_{i=1}^{n} |1 - z_i^{a_i}| + \sum\limits_{i=1}^{n} |1 + z_i^{a_i}| = 2n\sqrt{2}$.

Sven Cortel, elev, Satu Mare

X.137. Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $|z+a| + |z-b| + |a-b| = 2$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

X.138. Rezolvaţi ecuaţia

$$\log_5^2(2^{4x} + 2^{2-x}) + 2^{4x} + 2^{2-x} = 4 + \log_5(2^{8x} + 2^{3x+3} + 2^{4-2x}).$$

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

X.139. Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $[\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n^2}] = n$;

b) $[\sqrt[n-1]{n} + \sqrt[n-1]{n^2}] = n$.

Ionel Tudor, Călugăreni

X.140. Dacă în triunghiul ABC, cu notaţiile uzuale, are loc egalitatea $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 + 9r^2$, atunci triunghiul este echilateral.

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a XI-a

XI.136. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = 9$, $\det B = 4$ şi $\det(A+B) = 1$. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ pentru care numărul $\det(A + xB)$ este minim.

Răzvan Ceucă, student, Iaşi

XI.137. Fie $a \in (0,1) \cup [2, \infty)$ şi şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $\forall n \geq 1$. Notăm $y_n = \dfrac{\sqrt{2a} - x_{n+1}}{a - x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că $y_n > \dfrac{2}{2\sqrt{2a}+1+\sqrt{1+4a}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dacă $a \in (0,1)$, arătaţi că, în plus, $y_n < \dfrac{1}{\sqrt{2a}+a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

XI.138. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale monoton şi convergent. Arătaţi că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)^{2013}$ are aceeaşi monotonie cu $(x_n)_{n\geq 1}$ şi este, de asemenea, convergent.

Silviu Boga, Iaşi

XI.139. Dacă $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{pn}} - p\right)$.

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache, Craiova

XI.140. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, arătaţi că $2(\det A)^2 + \det(AB+BA) + 2(\det B)^2 \geq \det(A^2-B^2) + 4\det AB$.

Mihály Bencze, Braşov

Clasa a XII-a

XII.136. Calculaţi $\int \dfrac{x^{2013}+ax^{1006}}{(x^{1007}+b)^{2013}}dx$, $x \in (0,\infty)$, $a, b > 0$.

Cătălin Cristea, Craiova

XII.137. Determinaţi primitivele funcţiei $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos 2011x}{\cos^{2013} x}$.

Liviu Smarandache şi Lucian Tuţescu, Craiova

XII.138. Arătaţi că rădăcinile polinomului $X^3 + aX^2 + bX + c$ sunt în progresie geometrică dacă şi numai dacă $a^3c = b^3$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

XII.139. Pe mulţimea nevidă G se consideră operaţia asociativă „·" în raport cu care are loc regula de simplificare la stânga şi astfel încât există $a \in G$ cu $axa = x^3$, $\forall x \in G$. Demonstraţi că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

XII.140. Fie $a > 0$ şi cercurile de ecuaţii $\mathcal{C}_1 : (x-a)^2 + y^2 = a^2$ şi $\mathcal{C}_2 : (x+a)^2 + y^2 = a^2$. Determinaţi aria minimă a unei elipse care are drept axe de simetrie axele de coordonate şi este tangentă exterior în câte două puncte la fiecare dintre cercurile date.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G236. Determinaţi numerele naturale a, b, c, d şi e, strict mai mari ca 1, cu proprietatea că $a+b+c+d+e = abcde - 95$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G237. Arătaţi că există n numere naturale distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pentru care suma $a_1 + a_1 + \ldots + a_n$ este pătrat perfect, iar $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ este cub perfect.

Gheorghe Iurea, Iaşi