Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G216. Într-un pătrat 3×3 se aşază numerele de la 1 la 9 astfel încât produsul numerelor de pe linia k sau produsul numerelor de pe coloana k să fie pătrat perfect, pentru fiecare $k \in \{1, 2, 3\}$. Este posibil ca în centrul pătratului să se afle un număr impar?

Marius Mâinea, Găeşti

G217. Pe tablă sunt desenate p pătrăţele, $p \in \mathbb{N}^*$. Ionuţ colorează un pătrăţel, Ana colorează trei pătrăţele, apoi Ionuţ colorează cinci, Ana şapte ş.a.m.d. Pierde copilul care nu mai are pe tablă suficiente pătrăţele de colorat atunci când îi vine rândul. Determinaţi numerele p pentru care câştigătorul jocului este Ionuţ şi stabiliţi câte pătrăţele i-ar rămâne de colorat Anei (în funcţie de p).

Gheorghe Iurea, Iaşi

G218. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$. Demonstraţi că există o submulţime $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea că $|\sum\limits_{i \in A} a_i| \geq \dfrac{1}{4} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$.

Radu Miron, elev, Iaşi

G219. Fie a, b, c numere nenule, a impar, $b>c$ astfel încât $a=\dfrac{2bc}{b-c}$ şi $(a, b, c) = 1$. Arătaţi că abc este pătrat perfect.

Neculai Stanciu, Buzău şi Titu Zvonaru, Comăneşti

G220. Determinaţi cifrele a cu proprietatea că există pătrate perfecte de forma $\overline{2\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ ori}}6}$.

Adriana Dragomir şi Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

G221. Determinaţi numerele naturale n pentru care

$$A = 168 \left(\frac{1}{[\sqrt{n^2+n+15}]} - \frac{1}{[\sqrt{n^2+n+16}]} \right) \in \mathbb{N}.$$

Mircea Fianu, Bucureşti

G222. Rezolvaţi ecuaţia $(x+2)^3 = x(x^2-2)^5$, $x \in (0, \infty)$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

G223. Pentru $x, y, z \geq 0$, demonstraţi că are loc inegalitatea

$$xy(x^2-y^2)^2 + xz(x^2-z^2)^2 + yz(y^2-z^2)^2 \geq 4(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2.$$

Marian Tetiva, Bârlad

G224. Trapezul isoscel $ABCD$ are baza mare AB şi diagonalele perpendiculare în O. Paralela prin O la baze taie laturile neparalele BC şi AD în P, respectiv R. Punctul Q este simetricul lui P faţă de mijlocul lui BC. Dreapta RQ intersectează AC şi BD în punctele E, respectiv F. Demonstraţi că:

a) $RQ \perp AD$ şi $RQ = AD$;
b) $RE = FQ = CP$ şi $PQ = EF$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G225. Lucian-Georges are o placă triunghiulară omogenă ABC de masă 40 şi o balanţă cu două talere. El doreşte să taie placa ABC după m drepte paralele cu BC astfel încât, folosind aceste plăci ca greutăţi dispuse pe talerele dorite ale balanţei, să poată cântări orice obiect cu masa număr natural n, cu $1 \leq n \leq 40$. Cum îl sfătuiţi să procedeze, astfel încât m să fie minim posibil?

Dan Brânzei, Iaşi

B. Nivel liceal

L126. Tangentele unghiurilor unui triunghi ABC sunt numere raţionale. Arătaţi că numerele $E_n = \sin^n A \cdot \sin^n B \cdot \sin^n C + \cos^n A \cdot \cos^n B \cdot \cos^n C$ sunt raţionale, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Cătălin Calistru, Iaşi

L127. Măsurile unghiurilor B şi C ale triunghiului ABC sunt de $70°$, respectiv $30°$. Pe latura AB se consideră punctele E şi F astfel încât $\widehat{ACE} \equiv \widehat{ECF} \equiv \widehat{FCB}$. Fie AD înălţimea din A, $D \in BC$, iar $\{M\} = AD \cap CF$. Demonstraţi că MB este bisectoarea unghiului $\widehat{DMF}$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

L128. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ şi D un punct pe latura BC. Considerăm punctele E şi F pe laturile AB, respectiv AC astfel încât $BD = DE$ şi $CD = CF$. Notăm $\{T\} = BF \cap CE$. Arătaţi că patrulaterul $BDTE$ este inscriptibil dacă şi numai dacă patrulaterul $DCFT$ este inscriptibil.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L129. Fie date un triunghi ABC şi numerele naturale $m \geq n \geq 1$. Construiţi cu rigla şi compasul punctele A' din planul triunghiului pentru care triunghiul $A'BC$ are perimetrul şi aria de m, respectiv n ori mai mare decât cele ale triunghiului ABC.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L130. a) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 10$. Arătaţi că există o infinitate de n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cu $x_i \in (0,1)$, $\forall i = \overline{1,n}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{n}{2}$.

b) Pentru un n-uplu ca la a), notăm $E_n = \dfrac{x_1}{1-x_1} + \dfrac{x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} + \ldots + \dfrac{x_n}{(1-x_1)\ldots(1-x_n)}$. Arătaţi că $\dfrac{1}{E_n+1}$ se exprimă ca număr zecimal în care cel puţin primele $3 \cdot \left[\dfrac{n}{10}\right]$ zecimale sunt zerouri.

Cecilia Deaconescu, Piteşti

L131. Fie n un număr natural impar. Stabiliţi câte numere naturale nenule p au proprietatea că $p^2 + n^2$ este pătrat perfect şi determinaţi cel mai mare asemenea număr.

Marian Panţiruc, Iaşi

L132. Pentru a, b, c numere reale pozitive, demonstraţi inegalitatea

$$a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \geq \frac{18}{a+b+c}.$$

Florin Stănescu, Găeşti

L133. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu $a+b+c=3$, arătaţi că

$$\sum \frac{ab}{ab+a+b}+\frac{1}{9}\sum \frac{(a-b)^2}{ab+a+b} \leq 1.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L134. Fie n şi k numere întregi pozitive. Demonstraţi identităţile:

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{j}{k}\right]=n\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)$; b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left[\sqrt[k]{\frac{n}{j}}\right]=\sum_{q=1}^{[\sqrt[k]{n}]}\left[\frac{n}{q^k}\right]$.

Marian Tetiva, Bârlad

L135. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi X un vector nenul din $\mathbb{R}^n$ astfel încât $AX = O$ şi există $Y \in \mathbb{R}^n$ pentru care $AY = BX$. Notăm cu A_j matricea obţinută înlocuind coloana j a matricei A cu coloana j a matricei B. Arătaţi că $\sum\limits_{j=1}^{n} \det A_j = 0$.

Adrian Reisner, Paris

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G216. The numbers from 1 to 9 are arranged on a square with 3×3 cells so that the product of the numbers on row k or column k be a perfect square, for any $k \in \{1, 2, 3\}$. It is possible to set a odd number in the central cell of the square?

Marius Mâinea, Găeşti

G217. A number of p small squares are drawn on the blackboard. Johnny colours a square, Ann colours three squares, Johnny coulours five of them, Ann colours seven ones and so on. The child who has not sufficient squares to coulour when his/her turn comes on loses. Determine the number p for which the winner of the game is Johnny and establish how many small squares would remain for Ann to colour (as a function of p) .

Gheorghe Iurea, Iaşi

G218. The real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ are considered. Show that a subset $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ exists with the property that $|\sum\limits_{i\in A} a_i| \geq \dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$.

Radu Miron, elev, Iaşi

G219. Let a, b, c be nonzero numbers, a odd and $b > c$, such that $a = \dfrac{2bc}{b-c}$ and $(a, b, c) = 1$. Show that abc is a perfect square.

Neculai Stanciu, Buzău and Titu Zvonaru, Comăneşti

G220. Determine the digits a with the property that perfect squares of the form $\overline{2\underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ time}}6}$ exist.

Adriana Dragomir and Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

G221. Determine the natural number n such that

$$A = 168\left(\frac{1}{[\sqrt{n^2+n+15}]} - \frac{1}{[\sqrt{n^2+n+16}]}\right) \in \mathbb{N}.$$

Mircea Fianu, Bucureşti

G222. Solve the equation $(x+2)^3 = x\,(x^2-2)^5$, $x \in (0,\infty)$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

G223. For x, y, $z \geq 0$, show that the following inequality holds.

$$x\,y\,(x^2-y^2)^2 + x\,z\,(x^2-z^2)^2 + y\,z\,(y^2-z^2)^2 \geq 4\,(x-y)^2(x-z)^2(\,y-z)^2.$$

Marian Tetiva, Bârlad

G224. The isosceles trapezium $ABCD$ has the larger base AB and its diagonals are perpendicular at the point O. The parallel line through O to the bases intersects the non-parallel sides at P, respectively R. The point Q is the symmetric point of P with respect to the mid-point of BC. The line RQ intersects AC and BD at the points E, respectively F. Prove that

a) $RQ \perp AD$ and $RQ = AD$;
b) $RE = FQ = CP$ and $PQ = EF$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G225. Lucian-Georges has a homogeneous triangular plate ABC of mass $= 40$, and a pair of scales. He wants to cut the plate along m straight lines, parallel to BC such that $-$ using these smaller plates as weights placed on the balance pans $-$ he would be able to weigh any object of mass $= n$, with $1 \leq n \leq 40$. How would you advise him to proceed so that m be the minimum possible?

Dan Brânzei, Iaşi

B. Highschool Level

L126. The tangents of the angles of a triangle ABC are rational numbers. Show that the numbers $E_n = \sin^n A \cdot \sin^n B \cdot \sin^n C + \cos^n A \cdot \cos^n B \cdot \cos^n C$ are rational, any would be $n \in \mathbb{N}$.

Cătălin Calistru, Iaşi

L127. The measures of the angles B and C of the triangle ABC are equal to $70°$, respectively $30°$. The points E and F are considered on the side AB such that $\widehat{ACE} \equiv \widehat{ECF} \equiv \widehat{FCB}$. Let AD be the perpendicular from A, $D \in BC$, and $\{M\} = AD \cap CF$. Show that MB is the bisector of angle $\widehat{DMF}$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

L128. Let ABC be an isosceles triangle with $AB = AC$ and D a point on the side BC. Let us consider the points E and F on the sides AB, respectively AC such that $BD = DE$ and $CD = CF$. Denote $\{T\} = BF \cap CE$. Show that the quadrilateral $BDTE$ can be inscribed in a circle if and only if the quadrilateral $DCFT$ posseses a circumcircle, too.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L129. Let be given a triangle ABC and the natural numbers $m \geq n \geq 1$. Build, with a rule and a compass, the points A' in the plane of the triangle such that $A'BC$ has its perimeter and its area m times, respectively n times larger than those of triangle ABC.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L130. a) Let $n \in \mathbb{N}, n \geq 10$. Show that infiunitely many n-tuples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, with $x_i \in (0,1)$, $\forall i = \overline{1,n}$ and $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{n}{2}$, exist.

b) For an n-tuple as under a), denote $E_n = \dfrac{x_1}{1-x_1} + \dfrac{x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} + \ldots + \dfrac{x_n}{(1-x_1)\ldots(1-x_n)}$. Show that $\dfrac{1}{E_n + 1}$ can be expressed as a decimal number such that at least $3 \cdot \left[\dfrac{n}{10}\right]$ of its decimal digits are zeros.

Cecilia Deaconescu, Piteşti

L131. Let n be an odd natural number. Establish how many nonzero natural numbers p have the property that $p^2 + n^2$ is a perfect square and determine the largest number with this property.

Marian Panţiruc, Iaşi

L132. For the positive real numbers a, b, c prove the inequality

$$a\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + b\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \frac{18}{a+b+c}.$$

Florin Stănescu, Găeşti

L133. If a, b, c are positive real numbers with $a + b + c = 3$, show that

$$\sum \frac{a\,b}{a\,b + a + b} + \frac{1}{9} \sum \frac{(a-b)^2}{a\,b + a + b} \leq 1.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

L134. Let n and k be positive integer numbers. Prove the identities :

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{j}{k}\right] = n\left[\frac{n}{k}\right] - \frac{k}{2}\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right] + 1\right)$; b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left[\sqrt[k]{\frac{n}{j}}\right] = \sum_{q=1}^{[\sqrt[k]{n}]} \left[\frac{n}{q^k}\right]$.

Marian Tetiva, Bârlad

L135. Let $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ and X a nonzero vector in $\mathbb{R}^n$, such that $AX = 0$ and there exists a $Y \in \mathbb{R}^n$ such that $AY = BX$. We denote by A_j the matrix obtained after replacing column j of matrix A by column j of matrix B. Show that $\sum\limits_{j=1}^{n} \det A_j = 0$.

Adrian Reisner, Paris