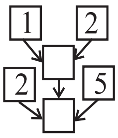
Probleme propuse[1]

Clasele primare

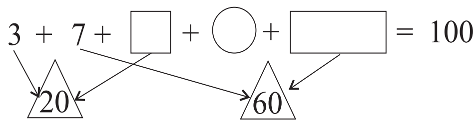
P.226. Scrieţi vecinii numărului care rezultă din compunerea alăturată.



(*Clasa I*) **Mihaela Cucoranu, elevă, Iaşi**

P.227. La plecare în vacanţă, trei elevi au convenit să-şi trimită felicitări: fiecare să trimită o singură felicitare la unul dintre ceilalţi doi. Este posibil ca unul dintre elevi să primească felicitare de la elevul căruia el însuşi i-a trimis felicitare?
(*Clasa I*) **Lavinia Dascălu, elevă, Iaşi**

P.228. Priviţi cu atenţie exerciţiul de mai jos:



Calculaţi: a) $\boxed{} + \boxed{}$ b) 100 - $\bigcirc$.
(*Clasa I*) **Ştefania Gavril, elevă, Iaşi**

P.229. Într-o cutie sunt 17 bile albe şi 19 bile negre. Sorin ia la întâmplare 5 bile. Câte bile de fiecare culoare rămân în cutie?
(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.230. Arătaţi că oricum am lua 6 numere din şirul $11, 12, 13, \ldots, 20$ există două care au suma 31.
(*Clasa a II-a*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

P.231. Asupra numerelor $10, 11, 12$ şi 13 se efectuează operaţia următoare: numerele pare se înlocuiesc cu predecesoarele lor şi cele impare se înlocuiesc cu succesoarele lor. În al doilea pas se repetă această operaţie asupra rezultatului obţinut; se continuă în acelaşi fel în paşii următori. Aflaţi de câte ori se repetă scrierea iniţială a numerelor între paşii 101 şi 230 ai şirului de operaţii.
(*Clasa a II-a*) **Paula Zaharia, elevă, Iaşi**

P.232. Cei şase membri ai unei echipe care participă la un concurs de matematică au vârste diferite, de cel puţin 10 ani şi cel mult 15 ani. În timpul concursului membrii echipei s-au aşezat la masă în ordinea vârstelor. Să se afle ce vârstă are fiecare ştiind că Ioana este cea mai mică, Anca este cea mai mare, Bogdan se află lângă Ioana şi nu se află lângă Bianca şi Andrei, iar Alexandra se află între doi băieţi.
(*Clasa a III-a*) **Constanţa Tudorache şi Nelu Tudorache, Iaşi**

P.233. Dacă $a \times b = 441$ şi b se împarte exact la a, calculaţi a şi b.
(*Clasa a III-a*) **Tatiana Ignat, elevă, Iaşi**

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 iunie 2012.

P.234. Aflaţi numerele naturale a şi b astfel încât $(a+2):(b+1)=a$.
(*Clasa a III-a*) **Codruţa Filip, elevă, Iaşi**

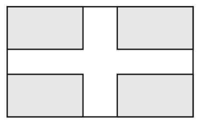
P.235. O carte are rupte mai multe foi consecutive. Prima pagină, de pe prima foaie ruptă, are numărul 163, iar ultima pagină are numărul format din aceleaşi cifre. Pot fi împărţite foile rupte în grupe de câte 3?
(*Clasa a III-a*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P.236. În două cutii sunt mingi de tenis, în prima fiind de două ori mai multe decât în a doua. Dacă din prima cutie se scot 30 de mingi şi din a doua 20, atunci în prima cutie rămân de 3 ori mai multe mingi decât în a doua. Câte mingi sunt în fiecare cutie?
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Petru Miron, Paşcani**

P.237. Într-o cameră sunt scaune cu 3 picioare şi cu 4 picioare. Când toate scaunele sunt ocupate, numărul picioarelor din cameră este 39. Câte scaune cu 4 picioare sunt în cameră?
(*Clasa a IV-a*) **Inst. Laura Chirilă, Iaşi**

P.238. Aflaţi numerele care se măresc de 11 ori prin adăugarea unei cifre diferite de zero la sfârşitul lor.
(*Clasa a IV-a*) **Nicoleta Cumpătă, elevă, Iaşi**

P.239. Dreptunghiul alăturat reprezintă o grădină care este formată din două alei şi patru straturi dreptunghiulare egale. Aflaţi dimensiunile grădinii ştiind că lăţimea fiecărei alei este de 2m, diferenţa dintre dimensiunile unui strat este de 1m, iar lungimea unui strat reprezintă $\frac{2}{5}$ din lungimea grădinii.



(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.144. Aflaţi numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc}=a+19b+10c$.
Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.145. Demonstraţi că numărul $A=2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{2012}$ nu este pătrat perfect.
Anca Chiriţescu, Ţigănaşi (Iaşi)

V.146. Se consideră mulţimea $A=\{\overline{abc}\,|\,a,c$ cifre pare, b cifră impară$\}$. Determinaţi cardinalul lui A şi suma elementelor lui A.
Bogdan Chiriac, student, Iaşi

V.147. Putem aşeza pe un cerc numerele $1,2,3,\ldots,2012$ astfel încât suma oricăror patru numere consecutive să se dividă cu 5?
Gheorghe Iurea, Iaşi

V.148. Arătaţi că $\dfrac{2^{371}+26\cdot 3^{237}}{3^{240}}<\dfrac{3^{371}+124\cdot 5^{247}}{5^{250}}$.
Petru Asaftei, Iaşi

V.149. Demonstraţi că 6^n $(n\in\mathbb{N})$ nu poate fi scris ca sumă de două pătrate perfecte nenule.
Elena Iurea, Iaşi

V.150. Despre un număr natural $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ spunem că este *număr bun* dacă există o infinitate de pătrate perfecte care au suma cifrelor egală cu $\overline{a_{n-1}a_n}$. Arătaţi că 2012 nu este număr bun, însă 2013 este număr bun.

Cristian Lazăr, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.144. Fie p un număr prim impar. Arătaţi că există un singur număr natural nenul k pentru care $p^2 + k^2$ este pătrat perfect.

Marian Panţiruc, Iaşi

VI.145. Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ şi mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z} | a - a^2 + 1 \leq x \leq a + a^2 + 1\}$. Determinaţi cardinalul lui A şi suma elementelor din A.

Ionel Nechifor, Iaşi

VI.146. Se pot împărţi numerele $1, 2, 3, \ldots, 2012$ în câteva submulţimi disjuncte astfel încât cel mai mare element al fiecărei submulţimi să fie egal cu produsul celorlalte elemente ale respectivei submulţimi?

Mihai Crăciun, Paşcani

VI.147. Găsiţi două numere raţionale mai mari decât 40 al căror produs să fie 2012, fiecare dintre ele având câte o infinitate de zecimale nenule.

Cristian Lazăr, Iaşi

VI.148. Determinaţi fracţiile ireductibile $\dfrac{a}{b}$ care se scriu sub formă zecimală ca fracţii periodice, cu zecimala de pe poziţia b egală cu b.

Gabriel Popa, Iaşi

VI.149. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{B}) = 3 \cdot m(\widehat{C})$. Fie $M, N \in AC$ astfel încât $\widehat{ABM} \equiv \widehat{MBN} \equiv \widehat{NBC}$ şi $AP \perp BN$, cu $P \in BN$; notăm $\{I\} = BM \cap AP$. Demonstraţi că NI este bisectoarea unghiului $\widehat{ANB}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

VI.150. Fie ABC un triunghi. Notăm cu D punctul de intersecţie dintre perpendiculara în B pe BC şi mediatoarea laturii AB şi cu E punctul de intersecţie dintre perpendiculara în C pe BC şi mediatoarea laturii AC. Dacă $\alpha = m(\widehat{BAC})$, caculaţi $m(\widehat{DAE})$ în funcţie de α.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.144. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \| CD$ şi $AB{=}3 \cdot CD$. Dacă E şi F sunt simetricele punctelor B şi A faţă de C, respectiv D, arătaţi că $CDEF$ este paralelogram.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

VII.145. În triunghiul ABC, se consideră mediana AD şi bisectoarea CE. Notăm $\{P\} = AD \cap CE$ şi $\{F\} = PB \cap AC$. Demonstraţi că triunghiul EFC este isoscel.

Valentina Blendea şi Gheorghe Blendea, Iaşi

VII.146. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţiunghic ABC şi D, E, F intersecţiile dreptelor AH, BH respectiv CH cu cercul circumscris triunghiului. Ştiind că patrulaterele $HBDC$, $HCEA$ şi $HAFB$ au ariile egale, arătaţi că $\triangle ABC$ este echilateral.

Adriana Dragomir şi Lucian Dragomir, Oţelu-Roşu

VII.147. Trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \| CD, AD \perp AB$) este circumscris cercului de centru O. Arătaţi că $\mathcal{A}_{ABCD} < \dfrac{1}{2}(OB + OC)^2$.

Daniela Munteanu, Iaşi

VII.148. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $x(x + 4) = 5(3^y - 1)$.

Neculai Stanciu, Buzău

VII.149. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $a = 2^{n^3 - n + 2}$, $b = 5^{8n^3 - 2n + 2}$. Arătaţi că produsul $a \cdot b$ se poate scrie ca sumă de patru cuburi perfecte nenule.

Constantin Dragomir, Piteşti

VII.150. Fie x, y numere reale strict pozitive cu $x > y$. Demonstraţi că $x^2 + y^2 > 2\sqrt{xy \cdot (x^2 - y^2)}$ şi interpretaţi geometric rezultatul.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

Clasa a VIII-a

VIII.144. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub şi $VA'B'C'D'$ o piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile egale şi vârful V în exteriorul cubului. Aflaţi sinusul unghiului dintre dreapta $A'C$ şi planul $(VA'B')$.

Mirela Marin, Iaşi

VIII.145. Fie $a \in (1, \infty)$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a + n - 1$ şi $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2 + n - 1$. Determinaţi cea mai mare valoare posibilă a lui x_n.

Lucian Tuţescu, Craiova şi Dumitru Săvulescu, Bucureşti

VIII.146. Rezolvaţi în $\mathbb{R}^2$ sistemul $\begin{cases} x^2 - xy = 3 \\ 48x^2 + 4xy(x+1)^2 = (x+1)^4 \end{cases}$.

Vasile Chiriac, Bacău

VIII.147. Determinaţi bazele de numeraţie $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ pentru care numărul $N = 11111_{(x)}$ este pătrat perfect.

Cătălin Calistru, Iaşi

VIII.148. Stabiliţi câte submulţimi $\{a, b\}$ ale mulţimii $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ au proprietatea că $a^3 + b^3$ se divide cu 12.

Dorel Luchian, Iaşi

VIII.149. Demonstraţi că $abc(a + b + c)^2 \leq 3(a^5 + b^5 + c^5)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Gheorghe Struţu şi Adrian Stan, Buzău

VIII.150. Determinaţi mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{x}{x^4 - x^3 + 1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

Elena Iurea, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.126. În triunghiul ABC notăm cu O centrul cercului circumscris şi cu O' centrul cercului circumscris triunghiului median MNP. Atrătaţi că $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C}$.

Ion Pătraşcu, Craiova

IX.127. Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$, I centrul cercului înscris, G centrul de greutate, $\{D\} = AI \cap BC$ şi $\{T\} = IG \cap BC$. Demonstraţi că $GD \| AT$ dacă şi numai dacă $3a = b + c$. (A se vedea şi articolul din *RecMat–2/2011*, pag. 132-133.)

Titu Zvonaru, Comăneşti

IX.128. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive cu suma egală cu n. Demonstraţi că $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(x_i + n) \geq n^2 + n$.

Ion Nedelcu, Ploieşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

IX.129. Fie a, b, c numere reale pozitive cu $a \leq b \leq 24000$ şi $\sqrt{a + 2012} + \sqrt{b + 2012} = 2\sqrt{c + 2012}$. Determinaţi partea întreagă a numărului $\dfrac{a+b}{c}$.

Ionel Tudor, Călugăreni (Giurgiu)

IX.130. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $2^a + 1 = 3b^2$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Clasa a X-a

X.126. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $ab + bc + ca \geq 0$. Demonstraţi că $|a + bi| + |b + ci| + |c + ai| \geq \sqrt{6(ab + bc + ca)}$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

X.127. Dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, demonstraţi că are loc inegalitatea

$$\frac{(\log_a \frac{a}{b})^2}{\log_a ab} + \frac{(\log_a \frac{a}{c})^2}{\log_a ac} + \frac{(\log_a bc)^2}{\log_a \frac{a^2}{bc}} \geq 1.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

X.128. În raport cu reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(a, b)$, $0 < a < b$.

a) Arătaţi că există o infinitate de puncte B, cu ambele coordonate strict pozitive, pentru care $\min_{M \in Oy}(MA + MB) = \min_{N \in Ox}(NA + NB)$.

b) Expuneţi un procedeu de obţinere a punctelor B folosind doar rigla şi compasul.

Cecilia Deaconescu, Piteşti

X.129. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte de modul 1. Arătaţi că

$$(z_1 + z_2)^4 z_3^2 + (z_2 + z_3)^4 z_1^2 + (z_3 + z_1)^4 z_2^2 \geq 3 z_1^2 z_2^2 z_3^2.$$

Florin Stănescu, Găeşti

X.130. Fie $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$; arătaţi că ecuaţia $x^4 + 4x^3 + (4 - 4\sin\alpha - 2\sin^2\alpha)x^2 - (8\sin\alpha + 4\sin^2\alpha)x + (4\sin^2\alpha + 4\sin^3\alpha + \sin^4\alpha) = 0$ are toate soluţiile reale.

Ionel Tudor, Călugăreni (Giurgiu)

Clasa a XI-a

XI.126. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea că $A^4 + (A + I_n)^4 = O_n$. Demonstraţi că matricea $A^2 + A + I_n$ este inversabilă.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

XI.127. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere din intervalul $(0,1)$ şi $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirul lui Fibonacci ($F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$). Arătaţi că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{x_k(1-x_k^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(F_{n+2}-1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

XI.128. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n}{x_n+a}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $a, x_0 \in (0,\infty)$ sunt date.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XI.129. Determinaţi cel mai mic număr real α pentru care $\operatorname{tg} x \geq 4\sin x - \alpha$, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. (În legătură cu problema IX.109. din *RecMat–1/2010.*)

Gabriel Popa, Iaşi

XI.130. Se consideră numerele reale $1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < e^2$ astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} = n\sqrt{e}$ şi $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = e^n$. Arătaţi că $ex_n \ln^2 x_1 < x_1 x_n < ex_1 \ln^2 x_n$.

Mihai Haivas, Iaşi

Clasa a XII-a

XII.126. Calculaţi $I = \displaystyle\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{5x^2-(x^2-x+1)^2}}dx,\ x \in [1,2]$.

Constantin Dragomir, Piteşti

XII.127. Calculaţi $I = \displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1 + x + \frac{1}{x}\right) e^{x-\frac{1}{x}}dx$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XII.128. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, cu $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a, a+c]$. Demonstraţi că

$$\int_0^{2c} f(x)dx + 2cf(2a) \leq 4\int_a^{a+c} f(x)dx.$$

Mihai Haivas, Iaşi şi I.V. Maftei, Bucureşti

XII.129. Fie $m, p \in \mathbb{N}$, cu $m \geq 2$ şi p număr prim. Demonstraţi că există un grup finit G care are p^{m^2} elemente, în care fiecare element diferit de elementul neutru are ordinul p.

Constantin Şcheau, Ploieşti

XII.130. Determinaţi perechile de polinoame de gradul doi, cu coeficienţii reali şi unitare, ce verifică condiţia că rădăcinile unuia sunt coeficienţii celuilalt (se au în vedere coeficienţii lui X şi X^0). Indicaţi polinoamele de acest fel care intră în pereche cu ele însele.

Temistocle Bîrsan, Iaşi