Probleme propuse[1]

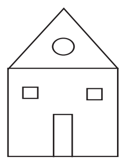
Clasele primare

P.206. Dan a scris în ordine descrescătoare numerele de la 75 la 23. Calculaţi diferenţa dintre al zecelea şi al 32-lea număr.

(*Clasa I*) **Andreea Bîzdîgă, elevă, Iaşi**

P.207. Fiecărei forme geometrice îi corespunde un preţ de cost: $\square \rightarrow 10$ lei, ▯ $\rightarrow 20$ lei, $\triangle \rightarrow 30$ lei, $\bigcirc \rightarrow 20$ lei. Cât costă confecţionarea căsuţei?

(*Clasa I*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**



P.208. Pe trei rafturi sunt 75 cărţi. Dacă pe primul raft punem jumătate din cărţile de pe cel de-al doilea, atunci vom avea pe rafturi numere consecutive de cărţi. Câte cărţi erau la început pe fiecare raft?

(*Clasa a II-a*) **Iulia Sticea, elevă, Iaşi**

P.209. Numărul lalelelor dintr-o vază este cu 7 mai mare decât numărul trandafirilor, care reprezintă jumătate din numărul lalelelor. Câte flori sunt în vază?

(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.210. Ce zi nu poate fi astăzi, dacă alaltăieri nu a fost luni şi poimâine nu este sâmbătă?

(*Clasa a III-a*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

P.211. Suma a două numere este un număr de două cifre al căror produs este 5. Care sunt cele două numere, dacă diferenţa lor este 7?

(*Clasa a III-a*) **Ana Cojocariu, Iaşi**

P.212. Un elev a greşit la adunarea a două numere: a scris cifra zero la sfârşitul primului număr în loc s-o scrie la sfârşitul celui de-al doilea şi astfel a obţinut suma 98 şi nu 89 - suma corectă. Aflaţi cele două numere.

(*Clasa a III-a*) **Cristina Timofte, Iaşi**

P.213. O vilă turistică are apartamente cu 3 şi 4 camere. Ştiind că în uşa de intrare a fiecărui apartement se află câte 2 chei, iar numărul camerelor şi al cheilor la un loc este 39, aflaţi câte apartamente cu 3 camere sunt în vilă.

(*Clasa a IV-a*) **Dorel Luchian, Iaşi**

P.214. La o masă rotundă stau cinci copii, fiecare având câte un jeton pe care este scris un număr. Toţi copiii afirmă că vecinii lor au jetoane cu numere de parităţi diferite. Arătaţi că măcar un copil nu spune adevărul.

(*Clasa a IV-a*) **Iuliana Moldovan, studentă, Iaşi**

P.215. Într-un rucsac sunt 12 şosete care pot forma şase perechi de culori diferite, iar două dintre ele sunt rupte. Câte şosete trebuie scoase la întâmplare din rucsac pentru a avea o pereche bună?

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

---

[1]Se primesc soluţii până la data de 31 iunie 2011.

Clasa a V-a

V.130. Determinaţi numărul $\overline{a0bb}_{(3)}$, dacă $\overline{a0bb}_{(3)} = \overline{bba}_{(7)}$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.131. Se consideră numărul $N = 1 + 7 + 13 + 19 + a + b + 37$, unde termenii sumei sunt scrişi în ordine strict crescătoare. Determinaţi numărul perechilor (a, b) pentru care N este pătrat perfect.

Anca Chiriţescu, Ţigănaşi (Iaşi)

V.132. Numerele $0, 1, \ldots, 2011$ sunt aranjate într-un tablou astfel:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 7 & 8 & 15 & \ldots & 2008 \\ 1 & 6 & 9 & 14 & \ldots & 2009 \\ 2 & 5 & 10 & 13 & \ldots & 2010 \\ 3 & 4 & 11 & 12 & \ldots & 2011. \end{array}$$

a) Stabiliţi care sunt elementele coloanei 211 (de sus în jos).
b) Calculaţi suma elementelor de pe a treia linie.

Ioana Maria Popa, elevă, Iaşi

V.133. Calculaţi sumele:
a) $S_1 = 85 + 985 + 9985 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{2011 \text{ de } 9}85$;
b) $S_2 = 17 + 197 + 1997 + \ldots + 1\underbrace{99\ldots9}_{2011 \text{ de } 9}7$.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

V.134. Lucian-Georges rămâne nesupravegheat la calculator şi, din neatenţie, printează toate numerele naturale de 1 la 1 000 000. Drept pedeapsă, el trebuie să numere de câte ori a fost tipărită cifra 5. Care este răspunsul corect pe care trebuie să-l dea copilul?

Andrei Nedelcu şi Cătălin Budeanu, Iaşi

V.135. Demonstraţi că $2^{122} < 10^{37}$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

V.136. Se consideră şirul de numere naturale $4, 19, 163, 1945, \ldots$. Determinaţi ultimele 501 cifre ale celui de-al 2011-lea termen al şirului.

Mihai Crăciun, Paşcani

Clasa a VI-a

VI.130. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_{2011}$ puncte echidistante pe o dreaptă d. Notăm cu $B_1, B_2, \ldots, B_{2010}$ mijloacele segmentelor $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2010}A_{2011}$; apoi, fie $C_1, C_2, \ldots, C_{2009}$ mijloacele segmentelor $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_{2009}B_{2010}$ ş.a.m.d., până când obţinem un singur punct M. Determinaţi poziţia punctului M.

Elena Iurea, Iaşi

VI.131. Se consideră $\triangle ABC$ cu $AC = BC$ şi punctele M, N cu $B \in [AM]$, $N \in [AC]$ şi $BM = CN$. Arătaţi că $MA = MN$ dacă şi numai dacă $\widehat{MBC} \equiv \widehat{CNM}$.

Petru Asaftei, Iaşi

VI.132. Se consideră triunghiurile isoscele ABC şi ABD cu $AB = AC = AD$, $m(\widehat{BAC}) = 28°$, $m(\widehat{BAD}) = 32°$, punctele C şi D fiind de o parte şi de alta a dreptei AB. Dacă E este mijlocul segmentului AC şi $\{M\} = DE \cap BC$, determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului MAB.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău

VI.133. Măsura unui unghi este $u = \overline{ab}'\overline{ab}''$, unde $0 < \overline{ab} < 60$, iar numărul natural nenul n are proprietatea că $n \cdot u$ exprimă un număr întreg de grade. Aflaţi u pentru care n este minim.

Marian Panţiruc, Iaşi

VI.134. Arătaţi că numărul $A = 2010^{2010} + 2012^{2012} - 2$ este divizibil cu 2011.

Daniela Munteanu, Iaşi

VI.135. Determinaţi câte fracţii ireductibile şi subunitare au proprietatea că suma dintre numărător şi numitor este 1005.

Mirela Marin, Iaşi

VI.136. După ce fiecare echipă a jucat cu fiecare dintre celelalte câte un meci, clasamentul grupei A de la Campionatul mondial de fotbal 2010 arăta astfel:

1. Uruguay	3	2 1 0	4-0	7
2. Mexic	3	1 1 1	3-2	4
3. Africa de Sud	3	1 1 1	3-5	4
4. Franţa	3	0 1 2	1-4	1

Ştiind că în meciul Uruguay-Franţa nu s-a marcat niciun gol, aflaţi rezultatele fiecăruia dintre cele şase meciuri.

Titu Zvonaru, Comăneşti

Clasa a VII-a

VII.130. Fie C' mijlocul laturii AB a triunghiului ABC, iar P un punct pe segmentul CC'. Dacă $AP \cap BC = \{R\}$, arătaţi că $AP \cdot CR = BC \cdot PR$.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

VII.131. Într-un triunghi ABC, lungimile laturilor verifică relaţia $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b+c}{a}$. Dacă $m(\widehat{A}) = \alpha$, determinaţi măsurile unghiurilor $\widehat{B}$ şi $\widehat{C}$.

Neculai Stanciu, Buzău

VII.132. În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră coarda $[AB]$. Notăm cu C mijlocul arcului mare $\overset{\frown}{AB}$, cu O' simetricul punctului O faţă de AB şi fie $x = m(\overset{\frown}{ACB})$. Determinaţi valorile lui x pentru care $O' \in Int\,\mathcal{C}$.

Geanina Havârneanu, Iaşi

VII.133. Se consideră pătratul $ABCD$ cu latura de $3\sqrt{5}$cm. Pe semidreptele $(AB$ şi $(BC$ se consideră punctele M, respectiv N, astfel încât $AM = 7\sqrt{5}$cm şi $BN = 10\sqrt{5}$cm. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{MND}$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

VII.134. Comparaţi numerele reale $a = 2\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \ldots + 2\sqrt{64}$ şi $b = (\sqrt{0} + \sqrt{2}) + (\sqrt{1} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} + \sqrt{4}) + \ldots + (\sqrt{63} + \sqrt{65})$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică, Piteşti

VII.135. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $x^3 + y^3 + 3xy = 9$.

Cristina Ene, elevă, Craiova

VII.136. Numerele întregi x, y şi z verifică relaţia $17x + 5y - 2z = 0$. Arătaţi că numărul $A = \dfrac{(3x+y)(z-x)(2x+2y+z)(3y+3z-x)}{210}$ este natural, pătrat perfect.

Mihai Haivas, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.130. Date fiind punctele A, B şi C, determinaţi punctele P din spaţiu cu proprietatea că $PA^2 + PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2 - BC^2$.

Dan Popescu, Suceava

VIII.131. Demonstraţi că $\sqrt{(1-x)(1+y)} + \sqrt{(1+x)(1-y)} \leq \sqrt{4-(x+y)^2}$, $\forall x, y \in [-1, 1]$.

Rodica Pop şi Ovidiu Pop, Satu Mare

VIII.132. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $\sqrt{a^2+ab+b^2} + \sqrt{a^2+ac+c^2} + \sqrt{b^2+bc+c^2} = \sqrt{3}(a+b+c)$, arătaţi că $a = b = c$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

VIII.133. Fie $E(x,y,z) = \dfrac{(1+x)(1+y)}{1+\sqrt{xy}} + \dfrac{(1+y)(1+z)}{1+\sqrt{yz}} + \dfrac{(1+z)(1+x)}{1+\sqrt{zx}}$.

a) Arătaţi că $E(x,y,z) \geq x + y + z + 3$, $\forall x, y, z \in (0, 1)$.

b) Arătaţi că $E(x,y,z) \leq x + y + z + 3$, $\forall x, y, z \in (1, \infty)$.

Ion Nedelcu, Ploieşti şi Liviu Smarandache, Craiova

VIII.134. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ sunt laturile unui triunghi, demonstraţi că $a^{a^2+2ac} \cdot b^{b^2+2ab} \cdot c^{c^2+2bc} < \left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)^{(a+b+c)^2}$.

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi

VIII.135. Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Găsiţi cea mai mică şi cea mai mare valoare ale expresiei $E = \sqrt{x_1 + x_1x_2} + \sqrt{x_2 + x_2x_3} + \ldots \sqrt{x_n + x_nx_1}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VII.136. Fie $m, n \in \mathbb{Z}$, $m < n$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ numere întregi dinstincte două câte două, cuprinse între $2m$ şi $2n$. Demonstraţi că printre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}$ ori există unul egal cu $m + n$, ori există două având suma $2m + 2n$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Clasa a IX-a

IX.116. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $8x^3 + y^3 + 12xy = 8$.

Vasile Chiriac, Bacău

IX.117. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$.

Mihály Bencze, Braşov

IX.118. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$, demonstraţi că are loc inegalitatea

$$\sum_{cyclic} \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \geq 2 \sum_{cyclic} \frac{z\sqrt{xy}}{(x+z)(y+z)}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

IX.119. Fie P un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC şi P_1, P_2, P_3 proiecţiile lui pe laturile triunghiului. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, demonstraţi că mijlocul G_1 al segmentului PG este centru de greutate pentru triunghiul $P_1P_2P_3$.

Petru Asaftei, Iaşi

IX.120. Fie P un punct în interiorul triunghiului ABC astfel încât $\widehat{PAB} \equiv \widehat{PBC} \equiv \widehat{PCA}$. Dacă $AB \cdot \overrightarrow{AP} + BC \cdot \overrightarrow{BP} + CA \cdot \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$, arătaţi că $\triangle ABC$ este echilateral.

Claudiu Mândrilă, elev, Târgovişte

Clasa a X-a

X.116. O urnă conţine x bile roşii şi $n - x$ bile verzi, unde $x, n \in \mathbb{N}^*$, $x < n$. $\frac{x}{3}$ bile roşii şi $\frac{x}{2}$ bile verzi sunt marcate cu 1, iar celelalte bile sunt marcate cu 2. Din urnă se extrage o bilă şi se consideră evenimentele A: ,,obţinem o bilă roşie" şi B: ,,obţinem o bilă marcată cu 1".

a) Determinaţi n şi x pentru care A şi B sunt evenimente independente.

b) Aflaţi $P(\overline{B}|\overline{A})$.

Laurenţiu Modan, Bucureşti

X.117. Demonstraţi că $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ionuţ Ivănescu, Craiova

X.118. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care

$$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x + n \sin^2 x \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ani Drăghici şi Ileana Mândruleanu, Craiova

X.119. Demonstraţi că pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ are loc inegalitatea

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 \geq |z_1 + z_2 + z_3|^2 + Im(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1).$$

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

X.120. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul $\mathcal{C}(M, R)$, având $m(\widehat{BOC}) \leq 90°$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Demonstraţi că

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 \geq AC \cdot BD - 4R^2.$$

Când se realizează egalitatea?

Florin Stănescu, Găeşti

Clasa a XI-a

XI.116. a) Fie $\alpha \in \mathbb{R}_+$ şi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $det(\alpha I_2 + A^2) = 0$; demonstraţi că $det\, A = \alpha$.

b) Arătaţi că există $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$ şi $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $det(\alpha I_2 + A^2) = 0$ şi $det A \neq \alpha$.

Dan Popescu, Suceava

XI.117. Dacă $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, arătaţi că $ax \geq \ln(bx+1)$, $\forall x \in \left(-\frac{1}{b}, \infty\right)$ dacă şi numai dacă $a = b$.

Dumitru Săvulescu, Bucureşti

XI.118. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ numere reale pentru care limita $l = \lim\limits_{x\to\infty}(\alpha_1\{x\} + \alpha_2\left\{x + \frac{1}{2}\right\} + \alpha_3\left\{x + \frac{2}{3}\right\} + \alpha_4\{3x\})$ este finită (unde $\{\cdot\}$ desemnează partea fracţionară). Arătaţi că $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0$.

Marius Drăgan, Bucureşti

XI.119. Se consideră şirul $(u_n)_{n\geq 0}$ definit prin $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_{n+2} = 1 + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{u_{n+1}}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că şirul este convergent şi aflaţi-i limita.

Moubinool Omarjee, Paris

XI.120. Fie $k, a, b \in (0, \infty)$, $a < b$ şi şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ definite prin $x_1 = a$, $y_1 = b$, $x_{n+1} = \dfrac{k^2 + kx_n + x_n y_n}{y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{k^2 + ky_n + x_n y_n}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că $x_n < \dfrac{k^2 + 2ka + ab}{b - a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătaţi că şirurile date au limite şi determinaţi aceste limite.

Lucian Tuţescu şi Mircea Tereujanu, Craiova

Clasa a XII-a

XII.116. Determinaţi funcţia $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$ cu proprietatea că

$$f(3x) + f(5x) + f(7x) = 3x^2 + 5x + 6, \ \ \forall x \in \mathbb{Z}_8.$$

Bogdan Chiriac, student, Iaşi

XII.117. Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care există $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$ astfel încât $\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\alpha}(2t^3+3)dt = n$.

Romeo Cernat, Iaşi

XII.118. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)dx = \ln\dfrac{a+1}{a}$, unde $a \in (0, 1)$ este dat. Demonstraţi că există $x_0 \in (0, 1)$ astfel încât $\dfrac{1}{x_0 + 1} < f(x_0) < \dfrac{1}{x_0}$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

XII.119. Demonstraţi că $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdot\ldots\cdot(n^2+n^2)}}{n} = \frac{2}{e^2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}}$.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XII.120. Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie continuă cu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, astfel încât oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există un unic $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ pentru care $\displaystyle\int_0^{x_n} \frac{\ln(1 + f(t))}{f(t)} dt = \int_0^n \frac{\sin f(t)}{f(t)} dt$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Florin Stănescu, Găeşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G196. Fie M mulţimea numerelor naturale nenule scrise numai cu cifre pare, care au cel mult 2011 cifre. Arătaţi că suma inverselor elementelor lui M este mai mică decât 4.

Cecilia Deaconescu, Piteşti

G197. Determinaţi cea mai mare putere a lui 3 care divide numărul $N = 16^{2011} - 2 \cdot 8^{2011} + 3 \cdot 4^{2011} - 2 \cdot 2^{2011} + 1$.

Pedro H.O. Pantoja, Brazil

G198. Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia $6^n + 2800 = m^6$.

Andrei Eckstein, Timişoara

G199. Determinaţi $b \in \mathbb{N}^*$ pentru care există $a \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2 + ab + b^2$ să fie pătrat perfect.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G200. Arătaţi că $\dfrac{a^2}{2b^3 + 2c^3 + 5} + \dfrac{b^2}{2a^3 + 2c^3 + 5} + \dfrac{c^2}{2a^3 + 2b^3 + 5} \le \dfrac{1}{3}$, $\forall a, b, c \in [0, 1]$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

G201. Se consideră triunghiul ABC cu $AC \neq BC > AB$. Dacă există un punct $D \in (BC)$ pentru care $AB^2 = BD \cdot BC$ şi $AD^2 = BD \cdot DC$, arătaţi că $-\dfrac{1}{3} \le \dfrac{AB^2}{BC^2 - AC^2} \le 1$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

G202. Fie $ABCD$ pătrat, iar punctele M şi N pe laturile AB, respectiv AD sunt astfel încât $AM = DN = k \cdot AB$. Notăm $\{P\} = CN \cap DM$ şi $\{Q\} = AP \cap CD$. Determinaţi valorile lui k pentru care PQ este bisectoare, respectiv mediană în triunghiul CDP.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

G203. Fie date numerele reale a şi b cu $a < b < 2a$. Triunghiurile isoscele ABC şi $A'B'C'$ au aceeaşi axă de simetrie, aceeaşi dreaptă suport a bazelor, iar $BC = a$, $AB = AC = b$, $B'C' = b$, $A'B' = A'C' = a$. Dacă $\{M\} = AB \cap A'B'$,