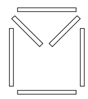
Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.124. Schimbă locul unui singur beţişor pentru a obţine o egalitate.



(*Clasa I*) **Mariana Nastasia, elevă, Iaşi**

P.125. Într-o clasă cu 24 elevi sunt 3 perechi de gemeni. La şedinţa cu părinţii este prezent câte un singur părinte din fiecare familie. Câţi părinţi participă la şedinţă?

(*Clasa I*) **Mihaela Gâlcă, elevă, Iaşi**

P.126. Pentru a fierbe un ou sunt necesare 4 minute. Mama vrea să fiarbă 20 ouă în trei tranşe. Câte minute sunt necesare?

(*Clasa a II-a*) **Ionela Bărăgan, elevă Iaşi**

P.127. Mircea are cu 35 timbre mai mult decât fratele său, Marius. Cât devine diferenţa, dacă Mircea ar mai primi 10 timbre, iar Marius ar da unui prieten 5 timbre?

(*Clasa a II-a*) **Inst. Maria Racu, Iaşi**

P.128. Câte numere de forma $\overline{RMAT}$ îndeplinesc condiţia $\overline{RAM} = \overline{MAT}$?

(*Clasa a III-a*) **Dragoş Covrig, elev, Iaşi**

P.129. Scrieţi toate adunările de forma
$$\begin{array}{r}\mathrm{MARI}\ +\\ \mathrm{ARI}\\ \mathrm{RI}\\ \mathrm{I}\\ \hline 7676\end{array}.$$

(*Clasa a III-a*) **Dana Bârsan, elevă, Iaşi**

P.130. Dacă a, b, c sunt cifre, câte egalităţi de tipul $a \times c = b : c$ se pot scrie? Justificaţi răspunsul.

(*Clasa a III-a*) **Adina Voinescu, elevă, Iaşi**

P.131. Verificaţi dacă afirmaţia "A se împarte exact la 5, unde $A = 2000 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 1999) + 1999 + 1997$" este adevărată sau falsă.

(*Clasa a IV-a*) **Prof. Nicolae Ivăşchescu, Craiova**

P.132. Mama Oanei a împlinit 17532 zile pe data de 1 ianuarie 2007. În ce an, lună şi zi a avut o vârstă de 3 ori mai mică?

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Geta Creţu, Vaslui**

P.133. Doi elevi spun pe rând câte un număr natural, cel puţin egal cu 1 şi cel mult egal cu 7. Fiecare nou număr spus se adună la celelalte. Să se arate că primul elev poate să indice în aşa fel numerele încât să ajungă primul la suma 99.

(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.76. Dacă a, b, x sunt cifre în baza 10, să se rezolve ecuaţia cu necunoscuta x: $\overline{bxa} + \overline{baa} + \overline{xb} + \overline{ab} = \overline{abb} + \overline{aab}$.

Marius Farcaş, Iaşi

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2007.

V.77. Să se determine câte numere de trei cifre distincte $\overline{abc}$ au proprietatea că $\left(\overline{abc}-\overline{cba}\right):11$ este pătrat perfect.

Otilia Nemeş, Ocna Mureş (Alba)

V.78. Arătaţi că nu există trei numere prime a, b, c astfel încât $a\,(b+c)=bc$.

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

V.79. Arătaţi că numărul $13^{1000}-9^{1000}$ se divide cu 1000.

Damian Marinescu, Târgovişte

V.80. Dacă restul împărţirii unui număr natural la 10 este mai mare decât 5, spunem că acel număr este *favorabil.* Aflaţi numerele favorabile $\overline{ab}$ cu proprietatea că nici $\overline{ab}$, nici $\overline{ba}$ nu pot fi scrise ca sumă de două numere favorabile.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Clasa a VI-a

VI.76. Determinaţi $a,b,c\in\mathbb{Z}$ dacă $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{3c+5}{2c+1}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.77. Să se arate că între oricare două puteri naturale consecutive ale lui 3 se află cel puţin o putere a lui 2. Există două puteri consecutive ale lui 3 între care să putem găsi trei puteri ale lui 2?

Marius Damian, Brăila

VI. 78. Fie $a,b\in\mathbb{Z}$ astfel încât mulţimile $\{a+b,a+2b,\ldots,a+2007b\}$ şi $\{1,2,\ldots,2007\}$ coincid. Să se arate că există $k\in\mathbb{N}^*$ pentru care $a+kb=k$.

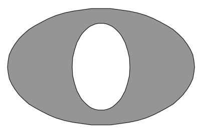
Dan Nedeianu, Drobeta-Tr. Severin

VI.79. Se consideră $\triangle ABC$ ascuţitunghic, iar M un punct în planul său. Paralela prin M la AB taie AC şi BC în P, respectiv N. Demonstraţi că dacă două dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate, atunci este adevărată şi a treia:

(i) BM bisectoare pentru $\widehat{ABC}$; (ii) $MC\perp MB$; (iii) $[NP]$ linie mijlocie în $\triangle ABC$.

Carmen-Daniela Tamaş, Bârlad

VI.80. Să se demonstreze că porţiunea haşurată din figura alăturată poate fi scrisă ca reuniune de segmente închise, două câte două disjuncte.



Marius Tiba, elev, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.76. Aflaţi numerele naturale a, b, c pentru care $11\,(a-b-9)>c\,(c-20)$, $11\,(b-c-9)>a\,(a-20)$ şi $11\,(c-a-9)>b\,(b-20)$.

Veronica Plăeşu şi Dan Plăeşu, Iaşi

VII.77. Fie x, y numere reale pozitive, ambele subunitare sau ambele supraunitare; să se arate că $xy+\dfrac{1}{xy}+2\geq x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}$. Dacă unul dintre numere este mai mic, iar celălalt mai mare ca 1, inegalitatea îşi schimbă sensul.

Marian Tetiva, Bârlad

VII.78. Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $6^a-5^b=1$.

Tudor Pădurariu, elev, Oneşti

VII.79. Fie $ABCD$ un patrulater convex, iar E şi F intersecţiile bisectoarelor unghiurilor $\widehat{D}$, respectiv $\widehat{B}$, cu diagonala $[AC]$. Să se arate că punctele E şi F coincid dacă şi numai dacă $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

Claudiu-Ştfean Popa, Iaşi

VII.80. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat înscris într-un cerc, iar P un punct pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. Să se arate că $PE + PF = PA + PB + PC + PD$.

Dan Radu, Bucureşti

Clasa a VIII-a

VIII.76. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$, $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ cu $MN \parallel AB$, iar $E \in (AB)$, $F \in (CD)$ oarecare. Fie $\{O\} = EF \cap MN$, $[OP]$ şi $[NT]$ perpendiculare de aceeaşi parte pe planul trapezului, G centrul de greutate al $\triangle PEF$, $\{Q\} = MG \cap (TBC)$. Să se arate că MN este linie mijlocie în trapez dacă şi numai dacă $Q \in TN$.

Bogdan Raiţă, elev, Iaşi

VIII.77. Pentru $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, să se demonstreze inegalitatea

$$x^6 + y^6 - x^2y^2\left(x^2 + y^2\right) \geq \left(x^3 + y^3 - xy\,(x + y)\right)^2.$$

Lucian Tuţescu, Craiova şi Gheorghe Nedelea, Piteşti

VIII.78. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}$, să se demonstreze inegalitatea

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} + \sqrt{c^2 + a^2 - ca} \geq a + b + c.$$

Claudiu-Ştfean Popa, Iaşi

VIII.79. Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $x\,(x + 1) = y^{2007}$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

VIII.80. Ştiind că 1 ianuarie 2007 este într-o zi de luni, să se arate că până în anul 2100 există trei ani bisecţi în care luna februarie are trei duminici care cad în zile impare.

Petru Asaftei, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.76. Fie d_1, d_2, …, d_k divizorii numărului $5^3 \cdot 7^2$, iar $S_n = d_1^n + d_2^n + \cdots + d_k^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $S_{2n} = \dfrac{\left(5^{4n} + 1\right)\left(7^{3n} + 1\right)}{\left(5^n + 1\right)\left(7^n + 1\right)} \cdot S_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Generalizare.

Petru Asaftei, Iaşi

IX.77. Să se arate că $a^3 + b^3 \geq ab\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$, $\forall a, b \geq 0$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.78. Fie a, b, c laturile $\triangle ABC$, iar G centrul său de greutate. Notăm cu D, E, F punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA, respectiv AB. Să se arate că $a\overrightarrow{GD} + b\overrightarrow{GE} + c\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă $\triangle ABC$ este echilateral.

Marian Ursărescu, Roman

IX.79. Fie $\triangle ABC$ echilateral şi P un punct în interiorul său. Considerăm $A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$, $C_1 \in CA$ astfel încât $PA = PA_1$, $PB = PB_1$ şi $PC = PC_1$. Să se arate că P este centrul de greutate al $\triangle A_1B_1C_1$.

Iulia Pleşca, elevă, Iaşi

IX.80. Fie α, β, γ, δ patru numere pozitive cu suma π. Să se afle maximul sumei $S = \sin\alpha\sin\beta + \sin\gamma\sin\delta$ şi să se determine situaţia în care acest maxim este atins.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Clasa a X-a

X.76. Fie $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Să se rezolve în $\mathcal{C}^2$ ecuaţia $z_1 z_2 = z_1 + z_2 + 3$.

Gabriel Popa şi Paul Georgescu, Iaşi

X.77. Fie $a, b \in \mathbb{C}$ şi z_1, z_2 soluţiile ecuaţiei $z^2 - az + b = 0$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $|z_1| < 1$ şi $|z_2| < 1$; $\quad$ (ii) $|a|^2 + \left|a^2 - 4b\right| < 2\left(|b|^2 + 1\right) < 4$.

Marian Tetiva, Bârlad

X.78. Determinaţi triunghiurile în care tangentele unghiurilor se exprimă prin numere naturale, exact două dintre ele având aceeaşi paritate.

Cătălin Calistru, Iaşi

X.79. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea $(p - r - 2R)(p - r_a) \cdot \cdot (p - r_b)(p - r_c) \geq 0$. Când se atinge egalitatea?

I. V. Maftei şi Dorel Băiţan, Bucureşti

X.80. Arătaţi că există o infinitate de valori $n \in \mathbb{N}$ pentru care numerele $2n + 1$ şi $3n + 1$ sunt pătrate perfecte.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a XI-a

XI.76. Dacă $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, să se arate că $\det(A + {}^tA \cdot i) = \det(A - {}^tA \cdot i)$. Generalizare.

Dan Popescu, Suceava

XI.77. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe $[a, b]$, cu ambele derivate strict pozitive. Pentru $\lambda \in [a, b]$, considerăm punctele $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, $C(\lambda, y_C) \in G_f$ şi $D(\lambda, y_D) \in AB$. Demonstraţi că există şi este unic $\lambda_0 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ astfel încât $f(b) - y_D = y_C - f(a)$.

Cătălin Ţigăeru, Suceava

XI.78. Pentru $x \in \mathbb{R}_+^*$, să se demonstreze inegalităţile:

$a)$ $\ln x + \dfrac{1}{x^a} \geq \dfrac{1}{a}(1 + \ln a)$, unde $a > 0$;

$b)$ $a^x > (1 + \varepsilon x)^k$, unde $a > e^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, iar $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Gheorghe Costovici, Iaşi

XI.79. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent, a cărui limită o notăm $L(x_n)$. Demonstraţi că există $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{L(x_n)}\right)^n = a \in \mathbb{R}_+^*$ dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + x_n - L(x_n))^n = b \in \mathbb{R}_+^*$. Ce legătură este între a şi b?

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

XI.80. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[0, 1]$, derivabilă pe $(0, 1)$, cu $f(0) = 0$. Presupunem că există $M > 0$ astfel încât $\left|f'(x) - \frac{1-x}{x} f(x)\right| < Mxe^{-x}$, $\forall x \in (0, 1)$. Să se arate că f este derivabilă în origine.

Mihai Crăciun, Paşcani

Clasa a XII-a

XII.76. Fie funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Arătaţi că există $c\in(a,b)$ astfel încât
$$\int_a^b \left(f(x)+f(a)+f(b)\right)dx=\frac{f(c)+f(a)+f(b)}{(c-a)^{n-1}}\cdot\frac{(b-a)^n}{n}.$$

Dumitru Mihalache, Bârlad

XII.77. Fie $k\in\mathbb{N}^*$ fixat. Considerăm şirurile $a_n=\int_{1/(n+1)^k}^{1/n^k}\arcsin\left(n^k x\right)dx$, $\forall n\geq 1$ şi $b_n=\int_{1/(n+1)^k}^{1/n^k}\operatorname{arctg}\left(n^k x\right)dx$, $\forall n\geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

Liviu Smarandache şi Lucian Tuţescu, Craiova

XII.78. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi fără puncte fixe, să se arate că nici funcţiile $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$, nu au puncte fixe.

Dorin Mărghidanu, Corabia

XII.79. Fie V spaţiu vectorial de dimensiune n peste corpul K, iar u un endormorfism nilpotent al lui V (i.e., există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $u^p=\underbrace{u\circ u\circ\cdots\circ u}_{n\text{ ori}}=0$). Să se arate că $u^n=0$.

Adrian Reisner, Paris

XII.80. Fie A un inel în care $x^4-y^4=(x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right)$, $\forall x,y\in A$.

a) Dacă inelul are unitate, să se arate că A este comutativ.

b) Rămâne valabil rezultatul de la *a*) dacă inelul A nu este unitar?

Gabriel Dospinescu, Paris şi Marian Tetiva, Bârlad

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G116. Aflaţi toate numerele naturale N de patru cifre nenule distincte cu proprietatea că diferenţa dintre cel mai mare număr obţinut prin permutarea cifrelor lui N şi cel mai mic asemenea număr este tocmai N.

Maria Miheţ, Timişoara

G117. Fie mulţimea $A=\{1,2,3,\ldots,98\}$. Arătaţi că oricum am alege 50 de elemente ale lui A, există două printre ele având suma cub perfect.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G118. În interiorul unui paralelogram având unghiul ascuţit de $30°$ şi lungimile laturilor 17 cm şi 59 cm, se consideră 2007 puncte. Să se arate că putem alege trei dintre aceste puncte astfel încât aria triunghiului determinat de ele să fie cel mult egală cu $\frac{1}{4}$ cm^2.

Mihai Haivas, Iaşi

G119. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $A=\left\{\varepsilon_0\cdot 2^0+\cdots+\varepsilon_n\cdot 2^n \mid \varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{\pm1\}\right\}$, iar $B=\left\{m \mid m\in 2\,\mathbb{Z}+1, |m|\leq 2^{n+1}-1\right\}$. Să se arate că $A=B$.

Dorel Miheţ, Timişoara

G120. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia $x!\,(y!)^{2005}=(z!)^{2007}$.

Anca Ştefania Tuţescu, elevă, Craiova

G121. Dacă $a, b \in (0, 3/2)$, să se demonstreze inegalitatea
$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b+3}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}.$$
Andrei Laurenţiu Ciupan, elev, Bucureşti

G122. Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$ şi G' proiecţia sa pe dreapta BC. Să se arate că $G' \notin [BC]$ dacă şi numai dacă $3a^2 < \left|b^2 - c^2\right|$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G123. Fie ABC un triunghi echilateral. Să se arate că orice punct M din plan cu proprietatea că $MB = MA + MC$ poate fi determinat folosind doar echerul. (Un echer poate fi folosit pentru a trasa drepte şi unghiuri drepte.)

Nicolae Ivăşchescu, Craiova

G124. Fie $\triangle ABC$, A' mijlocul lui $[BC]$, iar P şi Q proiecţiile lui A' pe AB, respectiv AC. Să se arate că $4PQ \leq AB + BC + CA$.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

G125. Fie $ABCD$ un pătrat, $M \in (AB)$, $\{O\} = AC \cap BD$, $\{S\} = CM \cap DA$, iar $\{E\} = SO \cap MD$. Considerăm $AA' \perp (ABC)$, $AA' = AB$, I mijlocul lui $[A'D]$, iar $\{H\} = MI \cap A'E$. Să se arate că:

a) $MD \perp (A'AE)$; *b)* $\dfrac{V_{A'ADH}}{V_{MADH}} = \left(\dfrac{AB}{AM}\right)^2$.

Petru Răducanu, Iaşi

B. Nivel liceal

L116. Cercul înscris în $\triangle ABC$ este tangent laturii BC în punctul D_1, iar cercul A-exînscris este tangent aceleeaşi laturi în punctul D_2. Dreapta AD_2 intersectează cercul înscris în punctele S şi T. Să se arate că $\triangle STD_1$ este dreptunghic.

Titu Zvonaru, Comăneşti

L117. Fie $\triangle ABC$, $D \in (BC)$, iar $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ cercurile exînscrise triunghiurilor ADB, şi ADC, tangente la BC. Arătaţi că o tangentă comună interioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ trece prin punctul de contact cu BC al cercului A-exînscris.

Neculai Roman, Mirceşti, Iaşi

L118. Fie M un punct al elipsei $\mathcal{E}$, de focare F şi F'. Dreptele MF şi MF' intersectează elipsa în A, respectiv A'. Să se arate că, atunci când M parcurege $\mathcal{E}$, dreapta AA' este mereu tangentă unei curbe fixe, care se cere a fi determinată.

Adrian Reisner, Paris

L119. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $a.b, c \in \mathbb{R}_+^*$ cu $ab + bc + ca = 3$. Să se arate că $a^{n+3} + b^{n+3} + c^{n+3} + 2abc\,(a^n + b^n + c^n) \geq 9$.

Titu Zvonaru, Comăneşti şi Bogdan Ioniţă, Bucureşti

L120. Pentru $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reale pozitive, să se demonstreze inegalitatea
$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{(n-1)^2}+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{(n-1)^2}+\cdots+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{(n-1)^2} \geq \frac{a_1 a_2^{2n-1}+a_2 a_3^{2n-1}+\cdots+a_n a_1^{2n-1}}{a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2}.$$
Marian Tetiva, Bârlad

L121. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ dat. Să se arate că există câţiva termeni ai şirului $\left(\dfrac{1}{m^3}\right)_{m \geq n+1}$ a căror sumă este mai mare decât $\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

Dumitru Mihalache şi Marian Tetiva, Bârlad

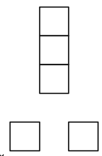
L122. La un campionat de fotbal participă 2^n echipe, astfel încât dintre oricare două se poate dinainte indica echipa mai bună. În prima etapă, echipele se împart aleator în perechi şi dispută câte un meci, echipa mai bună trecând în etapa următoare. Procedeul se repetă până la finală.

a) Care este probabilitatea ca a doua echipă ca valoare să iasă vicecampioană?

b) Dacă se dispută şi o finală mică, ce probabilitate este ca, în plus, cea de-a treia echipă ca valoare să se claseze pe locul 3?

Irina Mustaţă, studentă, Bremen

L123. Pe o tablă 8×9 se aşează dreptunghiuri 3×1 şi "figuri" de forma unui dreptunghi 1×3 căruia îi lipseşte pătratul median (ca în desenul alăturat). "Figurile" şi dreptunghiurile nu se pot roti şi nu au puncte interioare comune. Să se arate că există o mulţime S de 18 pătrate 1×1 astfel încât, dacă pe tablă rămân 2 pătrate neacoperite de dreptunghiuri sau "figuri", atunci cele două pătrate sunt obligatoriu din S.



Gabriel Dospinescu, student, Paris

L124. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.Determinaţi matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care ${}^t\left(\overline{A}\right) \cdot A = I_n$, iar $A^{2007} + A + I_n = O_n$ (cu $\overline{\cdot}$ am notat operaţia de conjugare).

Vlad Emanuel, elev, Sibiu

L125. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică şi lipschitziană (există $L > 0$ pentru care $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$), iae $(x_n)_{n \geq 1}$ un şir strict crescător, cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Să se arate că mulţimea punctelor limită ale şirului $(f(x_n))_{n \geq 1}$ coincide cu $\operatorname{Im} f$.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G116. Find all the natural numbers N of four distinct nonzero digits with the property that the diferrence between the largest number obtained by permuting the four digitis of N and the smallest number obtained in the same manner equals just N.

Maria Miheţ, Timişoara

G117. Let us consider the set $A = \{1, 2, 3, \ldots, 98\}$. Show that two elements exist among any 50 elements arbitrarily chosen from A such that their sum is a perfect cube.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G118. 2007 points are considered in the interior of a parallelogram with its acute angle equal to $30°$ and the lengths of its sides of 17 cm and 59 cm. Show that three among these points can be selected so that the area of the triangle determined by