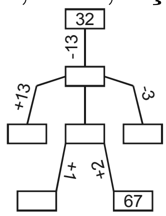
Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.104. Suma dintre predecesorul unui număr şi succesorul numărului următor lui este 29. Care este acest număr?

(*Clasa I*) **Irina Luca, elevă, Iaşi**

P.105. Alăturat se află roboţelul "MATE".



a) Completaţi casetele goale;

b) Aflaţi suma numerelor pe care le ţine în mâini;

c) Aflaţi diferenţa numerelor scrise în tălpile picioarelor.

(*Clasa I*) **Andrei Stativă, elev, Iaşi**

P.106. Pentru desemnarea campioanei, echipele de hochei pe gheaţă A şi B dispută un număr de partide până ce una dintre ele câştigă de 4 ori. Care este numărul maxim de partide care se pot juca, ştiind că nu au avut loc rezultate de egalitate?

(*Clasa a II-a*) **Înv. Constanţa Cristea şi Inst. Iulian Cristea, Iaşi**

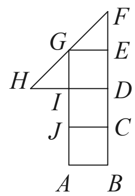
P107. Un grup de turişti a consumat 17 prăjituri şi 31 îngheţate. Ştiind că 7 turişti au consumat câte o îngheţată şi câte o prăjitură, 5 turişti au consumat numai câte două îngheţate, iar 4 turişti nu au consumat nimic, să se afle câţi turişti sunt în grup.

(*Clasa a II-a*) **Aliona Loghin, elevă, Iaşi**

P108. Prin împărţirea a două numere naturale rezultă câtul 3 şi restul 6. Ştiind că împărţitorul este un număr mai mic decât 10, aflaţi cele două numere.

(*Clasa a III-a*) **Înv. Rica Bucătariu, Iaşi**

P.109. Figura alăturată este formată din beţişoare.

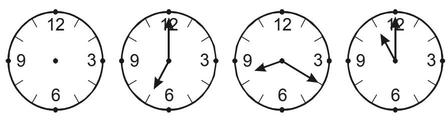


a) Îndepărtează un singur beţişor pentru a obţine tot atâtea triunghiuri ca şi pătrate;

b) Mută două beţişoare pentru a obţine de două ori mai multe dreptunghiuri decât pătrate.

(*Clasa a III-a*) **Adina Voinescu, elevă, Iaşi**

P.110. Ce oră indică primul ceas, ştiind că acesta respectă regula indicată de celelalte trei?



(*Clasa a III-a*) **Veronica Corbu, elevă, Iaşi**

P.111. Fie numărul $N = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$.

a) Care este cea mai mică şi cea mai mare valoare a lui N?

b) Câte valori diferite poate avea numărul N?

(*Clasa a IV-a*) **Oxana Pascal, elevă, Iaşi**

P.112. În urma desfăşurării unui joc didactic matematic, învăţătorul a oferit ca recompensă 44 baloane. Câte 4 baloane au primit un număr de participanţi ce

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2006.

reprezintă a şasea parte din totalul lor, câte două au primit a treia parte, iar restul participanţilor au primit câte un balon. Aflaţi numărul participanţilor la joc (soluţie aritmetică!).

(*Clasa a IV-a*) **Alexandra Nistor, elevă, Iaşi**

P.113. Dan şi-a pus timbrele în clasor, câte 10 pe unele pagini, câte 30 pe alte pagini şi au rămas de 4 ori mai multe pagini goale decât folosite. Dacă ar pune câte 5 timbre pe fiecare pagină, toate paginile ar fi folosite. Câte pagini poate avea clasorul, ştiind că nu depăşeşte 60 (soluţie aritmetică!)?

(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.66. Să se arate că, oricare ar fi cifra nenulă a, numărul $x = 21^{\overline{31a}} + 32^{\overline{a13}} + 43^{\overline{a31}}$ se divide cu 10.

Otilia Nemeş, Ocna Mureş (Alba)

V.67. $a)$ Să se arate că, scăzând din suma a 2006 numere pare consecutive suma numerelor situate între acestea, nu se poate obţine rezultatul 2006^2.

$b)$ Să se afle 2006 numere pare consecutive astfel încât, scăzând din suma lor suma numerelor situate între ele, să se obţină 2005^2.

Marian Panţiruc, Iaşi

V.68. Arătaţi că nu există $n \in \mathbb{N}$ pentru care $A_n = 5^n + 89$ să fie pătrat perfect.

Iulia Pleşca, elevă, Iaşi

V.69. Să se rezolve în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $8^n + 15^m = 6 + 6^2 + \cdots + 6^{2006}$.

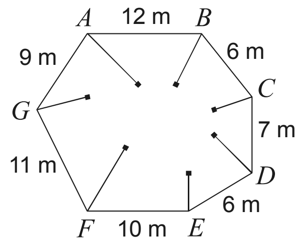
Alexandru Gabriel Tudorache, elev, Iaşi

V.70. Determinaţi $a \in \mathbb{N}$ pentru care numerele a, $a+2$, $a+6$, $a+12$, $a+18$, $a+20$, $a+26$, $a+30$, $a+32$, $a+36$, $a+60$ sunt simultan prime.

Lucian Tuţescu, Craiova

Clasa a VI-a

VI.66. Alăturat este desenată o grădină având forma unui poligon cu 7 laturi. În fiecare vârf se află câte o poartă mobilă astfel încât, în oricare două vârfuri vecine, porţile să închidă perfect latura pe care acestea o determină. Să se afle lungimile porţilor.



Roxana Căpăţână, elevă, Iaşi

VI.67. În patrulaterul $ABCD$ construim $AP \perp BD$, $CQ \perp BD$, $P, Q \in BD$ şi fie M mijlocul lui (AC). Dacă punctele M, P, Q sunt distincte două câte două, demonstraţi că $\triangle MPQ$ este isoscel.

Marius Farcaş, Iaşi

VI.68. Fie punctele A, C, M cu $m(\widehat{AMC}) \neq 90^\circ$ şi $AC = 2\,AM$. Să se arate că M este mijlocul lui $[AC]$ dacă şi numai dacă $2m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{MAC})$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

VI.69. Să se arate că pentru orice alegere a semnelor în expresia $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm 2006^2$, rezultatul nu se divide cu 2006.

Mihail Bencze, Braşov

VI.70. Determinaţi $m, n \in \mathbb{Z}$ pentru care $a = \dfrac{3m+1}{2m+1} + \dfrac{n+2}{3n+5} \in \mathbb{Z}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.66. Să se rezolve în $\mathbb{R}^4$ ecuaţia

$$30\sqrt{x-y+901} + 25\sqrt{y-z+626} + 20\sqrt{z-x+401} + 9\sqrt{t-x+78} = 2006.$$

Ioana Olan, elevă, Iaşi

VII.67. Aflaţi $a, b \in \mathbb{N}$ dacă $a + b = 18$ şi $10^{a+1} - 9b + 71 \vdots 81$.

Andrei-Sorin Cozma, elev, Iaşi

VII.68. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic, cu ipotenuza de lungime a, catetele b şi c, iar aria S. Dacă $x, y \in (0, \infty)$, să se arate că $\dfrac{a^2}{S} = \dfrac{2\left(x^2+y^2\right)}{xy}$ dacă şi numai dacă b şi c sunt direct sau invers proporţionale cu x şi y.

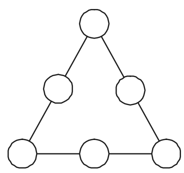
Veronica Plăeşu şi Dan Plăeşu, Iaşi

VII.69. Fie $\triangle MNP$ cu $m(\widehat{NMP}) = 90°$; se consideră punctele $S, T, M \in (NS)$, $M \in (PT)$, astfel încât $NS = 3\,MS$, $PT = 3\,MT$. Dacă $\{Q\} = PS \cap NT$, atunci:
a) $QM = NP$; *b)* $QN^2 + QP^2 = 5\,NP^2$.

Dorel Luchian, Iaşi

VII.70. Triunghiul alăturat este considerat fix. În câte moduri putem aşeza numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6 în cerculeţe, astfel încât suma numerelor de pe fiecare latură a triunghiului să fie aceeaşi?

Petru Asaftei, Iaşi



Clasa a VIII-a

VIII.66. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{2^4+2^2+1} + \frac{1}{3^4+3^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^4+n^2+1} < \frac{n-1}{3n}.$$

Carmen Daniela Tamaş, Bârlad

VIII.67. Fie $0 < a < b < c < d < e$ şi propoziţiile:

$$p_1 :\ b = \frac{2ac}{a+c};\quad p_2 :\ c = \frac{b+d}{2};\quad p_3 :\ c = \sqrt{ae};\quad p_4 :\ d = \frac{2ce}{c+e}.$$

Să se arate că dacă oricare trei dintre propoziţii sunt adevărate, atunci este adevărată şi cea de-a patra.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

VIII.68. Fie $A_n = 2006^n + 2005^n - 1992^n - 1991^n$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine n pentru care $A_n \vdots 28$.

Ionel Nechifor, Iaşi

VIII.69. Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Determinaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare a expresiei

$$E\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

Ion Vişan şi Lucian Tuţescu, Craiova

VIII.70. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi fie M, N mijloacele muchiilor $[AB]$, respectiv $[BC]$, iar $\{S\} = AN \cap CD$, $\{T\} = DM \cap BC$. Să se afle măsura unghiului format de $D'N$ şi ST.

Gabriel Popa, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.66. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, fie $a = y + xy - x$, $b = x^2 + x - xy$.

a) Dacă $a, b \in (-\infty, 0)$, să se compare numerele x şi y.

b) Arătaţi că există o infinitate de numere raţionale x, y pentru care $a, b \in (-\infty, 0)$.

Ionuţ Onofrei, elev, Hârlău

IX.67. Fie $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ astfel încât

$$(a_2 a_3 \cdots a_n)^2 + (a_1 a_3 a_4 \cdots a_n)^2 + \cdots + (a_1 a_2 \cdots a_{n-1})^2 = 1.$$

Să se arate că

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \geq n.$$

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

IX.68. În $\triangle ABC$ se consideră cevienele $[AM]$, $[BN]$, $[CP]$ concurente în T. Să se arate că $\dfrac{TA}{TM} = \dfrac{TB}{TN} = \dfrac{TC}{TP}$ dacă şi numai dacă T este centrul de greutate al $\triangle ABC$.

Ovidiu Pop, Satu Mare

IX.69. Fie $\triangle ABC$ nedreptunghic. Paralela prin B la AC şi simetrica dreptei AC în raport cu BC se intersectează în A_1; analog se obţin punctele B_1 şi C_1. Dacă AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

IX.70. Să se arate că $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 85^\circ > 4$.

D. M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

Clasa a X-a

X.66. Notăm cu $\mathcal{D}$ mulţimea punctelor $P(x, y)$ din planul xOy situate în interiorul sau pe laturile $\triangle ABC$. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$; definim funcţia $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $f(P) = ax + by + c$. Să se arate că pentru orice $P \in \mathcal{D}$, avem

$$\min\{f(A), f(B), f(C)\} \leq f(P) \leq \max\{f(A), f(B), f(C)\}.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

X.67. Fie $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Să se determine funcţiile crescătoare $f : \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \to (0, \infty)$ pentru care $f(x + y) = f(x) f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.

Dan-Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea, Hunedoara

X.68. Pe cercul trigonometric se consideră punctele A, B, C de afixe 1, ε, ε^2, unde $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3}$. Fie $M(z)$ un punct al cercului situat pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ ce nu conţine A. Să se arate că $\left|z^2 + z + 1\right| = -\dfrac{z^2 + z + 1}{z}$.

Marian Tetiva, Bârlad

X.69. Dacă $a, b, c > 1$, să se demonstreze inegalitatea

$$a^{\sqrt[3]{\log_a b} + \sqrt[3]{\log_a c}} + b^{\sqrt[3]{\log_b a} + \sqrt[3]{\log_b c}} + c^{\sqrt[3]{\log_c a} + \sqrt[3]{\log_c b}} \leq \frac{(a + b + c)^2}{3}.$$

Titu Zvonaru, Comăneşti

X.70. Fie pătratul $ABCD$. Să se determine mulţimea

$$\Delta = \left\{P \in \operatorname{Int} ABCD \mid PA^2, 2PB \cdot PD, PC^2 \text{ sunt laturile unui triunghi}\right\}.$$

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a XI-a

XI.66. Fie x_n, $n \in \mathbb{N}^*$, cel mai mic număr natural cu proprietatea că există $M = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{(10)}$ cu toate cifrele nenule, astfel încât $M = (n+1)\ \sqrt[n+1]{\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}} + 9x_n$. Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{10^n}$.

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

XI.67. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$, $x_{n+1} = 2x_n - \operatorname{tg} x_n$, $\forall n \geq 1$. Să se studieze existenţa limitelor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{-x_n}$.

Dan Popescu, Suceava

XI.68. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, o funcţie de două ori derivabilă cu $f''(x) \geq f'(x)$, $\forall x \in I$. Să se arate că $f(x) - f(a) \geq (e^{x-a} - 1) f'(a)$, $\forall x, a \in I$. Pentru $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, să se deducă inegalitatea lui Bernoulli.

Dumitru Mihalache, Bârlad

XI.69. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(AX + B) \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Să se arate că există $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A = BC$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.70. Fie a, b, c laturile unui triunghi ale cărui unghiuri au măsurile în radiani A, B, C şi care are raza cercului înscris r. Să se arate că distanţa de la punctul $M(A, B, C)$ la planul $\mathcal{P} : ax + by + cz + r = 0$ este mai mare decât $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

Sorin Puşpană, Craiova

Clasa a XII-a

XII.66. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $0 \leq a < b$ şi fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă pe $[a, b]$, cu f'' continuă. Dacă

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{a^2}{2} f'(a) - \frac{b^2}{2} f'(b) + bf(b) - af(a),$$

să se arate că există $\theta \in (a, b)$ astfel încât $f''(\theta) = 0$.

Mihai Haivas, Iaşi

XII.67. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că există $L \geq 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in [0, 1]$. Să se arate că pentru orice primitivă F a lui f şi pentru orice $x_1, x_2, \dots x_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc

$$\left| F\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}\right) - \frac{F(x_1) + F(x_2) + \cdots + F(x_n)}{n} \right| \leq \frac{L}{2n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - y_j)^2.$$

Dan-Ştefan Marinescu, Hunedoara

XII.68. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{P(x)}$, $g(x) = e^{Q(x)}$, unde P, Q sunt polinoame de grad $m \geq 1$, având coeficienţii dominanţi a, respectiv b, $a, b \in (0, \infty)$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(f(n) \int_0^n g(x)\,dx\right) / \left(g(n) \int_0^n f(x)\,dx\right)$.

b) Să se studieze buna definire a şirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $f(a_n) = \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,dx$, $g(b_n) = \frac{1}{n}\int_0^n g(x)\,dx$ şi apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

Marius Apetrii, Iaşi

XII.69. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ polinom reciproc de grad $4n+2$, $n \in \mathbb{N}^*$, având rădăcinile distincte, complexe şi nereale. Să se arate că f are cel puţin o rădăcină de modul 1.

Cătălin Ţigăeru, Suceava

XII.70. Fie G un grup de ordin $n \geq 4$ cu proprietatea că există $m \in \mathbb{N}$, $1 < m < n$, astfel încât G conţine exact C_{n-1}^{m-1} subgrupuri de ordin m. Arătaţi că G este abelian.

Marius Tărnăuceanu, Iaşi

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G96. Fie $a = x^{12m} + x^{12n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că numărul a este divizibil cu 13, dacă şi numai dacă x este divizibil cu 13.

Artur Bălăucă, Botoşani

G97. Determinaţi $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$, astfel încât numărul $A = \overline{a\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ ori}}}$, $n > 2$, să fie pătrat perfect.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G98. Să se determine $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{m}{n} + \frac{n+1}{m^2} \in \mathbb{N}^*$.

Gabriel Dospinescu, student, Paris

G99. Fie m, n două numere naturale nenule astfel încât m divide $n-1$. Toate numerele naturale între 1 şi n se aşează la întâmplare pe un cerc. Se calculează suma oricărui grup de m numere vecine. Să se demonstreze că printre aceste sume există două pentru care diferenţa dintre ele este strict mai mare decât $m-1$.

Titu Zvonaru, Comăneşti

G100. În câte moduri putem colora cu 5 culori un pătrat 3×3, astfel încât în fiecare pătrat 2×2 să existe patru culori diferite?

Gabriel Popa, Iaşi

G101. Să se demonstreze inegalitatea

$$4\left(\frac{1}{a(1+bc)^2} + \frac{1}{b(1+ca)^2} + \frac{1}{c(1+ab)^2}\right) \leq 1 + \frac{16}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)},$$

$\forall a, b, c \in (0, \infty)$ în condiţia $abc = 1$. Când are loc egalitatea?

Gabriel Mîrşanu şi Andrei Nedelcu, Iaşi

G102. Să se determine valoarea maximă a parametrului $m \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât

$$\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \geq m\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*.$$

Dorel Băiţan şi I. V. Maftei, Bucureşti

G103. Pentru $a, b, c \in (0,1)$ cu $a+b+c=2$, să se arate că
$$abc \geq 8\,(1-a)\,(1-b)\,(1-c)\,.$$
Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

G104. Triunghiul ABC are $m(\widehat{BAC}) = 120°$. Fie $O \in (BC)$ astfel încât $[AO$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. Pe $[AO$ se ia punctul D astfel încât $[BC$ este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{ABD}$. Să se arate că $AD + BD = AB + AC$ şi $AB + AC \geq 4\,AO$.

Petru Răducanu, Iaşi

G105. Se consideră trapezul $ABCD$ cu bazele AB, CD $(AB > CD)$ şi fie O intersecţia diagonalelor trapezului. Se duce linia mijlocie MN a trapezului şi paralela PQ prin O la bazele trapezului $(M, P \in (AB),\ N, Q \in (BC)\ )$. Să se demonstreze că trapezele $ABMN$ şi $PQCD$ au diagonalele respectiv paralele.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

B. Nivel liceal

L96. Fie cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}$ astfel încât $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior în D şi fiecare dintre ele este tangent interior lui $\mathcal{C}$ în B, respectiv C. Tangenta comună interioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi A_1. Dreapta AB taie cercul $\mathcal{C}_1$ în K, iar dreapta AC taie cercul $\mathcal{C}_2$ în L. Din punctul M de pe cercul $\mathcal{C}$ se duc tangentele MT_1 şi MT_2 la cercurile $\mathcal{C}_1$, respectiv $\mathcal{C}_2$ $(T_1 \in \mathcal{C}_1,\ T_2 \in \mathcal{C}_2)$. Dacă $MA < MA_1$, arătaţi că $MT_1 + MT_2 = \dfrac{A_1M}{A_1D} \cdot KL$ şi $|MT_1 - MT_2| = \dfrac{AM}{AD} \cdot KL$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L97. Să se demonstreze că în orice triunghi are loc inegalitatea
$$\frac{1}{m_a^2\,(m_b+m_c-m_a)} + \frac{1}{m_b^2\,(m_c+m_a-m_b)^2} + \frac{1}{m_c^2\,(m_a+m_b-m_c)^2} \geq \frac{1}{S^2}.$$
I. V. Maftei şi Dorel Băiţan, Bucureşti

L98. Se consideră un triunghi oarecare ABC. Demonstraţi că

1) $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C \geq \dfrac{27}{2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3$;

2) $\cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C \geq \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{r}{R}\right)^4 \left(5 - \dfrac{r_a}{r}\right)\left(5 - \dfrac{r_b}{r}\right)\left(5 - \dfrac{r_c}{r}\right)$,

unde R este raza cercului circumscris, r este raza cercului înscris, iar r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise.

Oleg Faynshteyn, Leipzig, Germania

L99. *a*) Care este numărul minim de puncte din plan de coordonate întregi astfel încât, oricum ar fi alese, să existe trei puncte cu centrul de greutate de coordonate întregi.

b) Să se arate că într-un spaţiu n-dimensional există 2^{n+1} puncte de coordonate întregi astfel încât oricare trei dintre acestea au centrul de greutate cu cel puţin o coodonată care nu este un întreg.

Irina Mustaţă, studentă, Bremen, Germania

L100. Fie $x \in (0,1)$; arătaţi că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{nx\} \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Ciprian Baghiu şi Gheorghe Iurea, Iaşi

L101. Fie $a, n \geq 2$ două numere întregi. Să se arate că $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{a^n - a^k}{n-k} \in \mathbb{Z}$.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

L102. Fie $p = 2k+1$ un număr prim. Atunci

$$S_1 = \sum_{i=k+1}^{2k} C_{p+i-1}^{i} \equiv 2^p - 2 \left(\operatorname{mod} p^2\right), \quad S_2 = \sum_{i=1}^{k} C_{p+i-1}^{i} \equiv 2 - 2^p \left(\operatorname{mod} p^2\right).$$

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

L103. Fie a, b, c, d reale astfel încât $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\left(1+d^2\right) = 16$. Arătaţi că

$$-3 \leq ab + bc + cd + da + ac + bd - abcd \leq 5.$$

Mai mult, avem egalitate în cel puţin una din inegalităţile de mai sus dacă şi numai dacă $a + b + c + d = abc + bcd + cda + dab$.

Gabriel Dospinescu, student, Paris

L104. Fie $x_0 > 0$ şi $x_n = x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{3}\right]} + \dfrac{n}{6}$, pentru orice $n > 0$.

a) Să se arate că şirul $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent la 1.

b) Să se arate că dacă $\alpha > \log_3 \dfrac{5}{2}$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n - n}{n^\alpha} = 0$.

Gabriel Dospinescu, student, Paris

L105. Să se determine toate funcţiile continue $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, care verifică ecuaţia funcţională

$$nx^{n-1} f\left(x^n\right) = (x+1) f(x), \quad \forall x \in (0, \infty),$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, n fixat.

Marian Tetiva şi Dumitru Mihalache, Bârlad

Training problems for mathematical contests

A. Junior highschool level

G96. Let $a = x^{12m} + x^{12n}$, with $m, n \in \mathbb{N}^*$. Prove that a is divisible by 13 if and only if x is divisible by 13.

Artur Bălăucă, Botoşani

G97. Find $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$, such that $A = \overline{a\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ times}}}$, $n > 2$ is a perfect square.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G98. Find $m, n \in \mathbb{N}^*$ such that $\dfrac{m}{n} + \dfrac{n+1}{m^2} \in \mathbb{N}^*$.

Gabriel Dospinescu, student, Paris

G99. Let m, n two positive integer such that m divides $n-1$. All positive integers between 1 and n are put on a circle in an arbitrary way. One compute the sum of any set of m neighbors numbers. Prove that among all these sums, there are two of them for which their difference is strictly grater than $m-1$.

Titu Zvonaru, Comăneşti