Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.84. Aflaţi numărul m ştiind că 47 este mai mare decât $m - 14$ cu 28.
(*Clasa I*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.85. Într-un coş sunt 6 mere, iar în altul sunt 5 pere. Cum pot primi 5 copii mere şi pere astfel încât nici un coş să nu rămână gol?
(*Clasa I*) **Veronica Corbu, elevă, Iaşi**

P.86. În urmă cu 4 ani, când tatăl avea 29 de ani, s-a născut fiul. Sora acestuia avea atunci 2 ani, iar acum este de trei ori mai mare. Mama este de patru ori mai mare decât aceasta. Câţi ani are acum fiul?
(*Clasa a II-a*) **Înv. Oana-Maria Lupu, Iaşi**

P.87. Un acrobat cade pe o plasă elastică de la o anumită înălţime şi se ridică după ce atinge plasa la jumătatea distanţei dintre plasă şi locul de unde a căzut anterior. Ştiind că atinge de 3 ori plasa şi că ultima oară s-a ridicat la înălţimea de 2 m, iar plasa este montată la 2 m deasupra solului, să se afle distanţa de la locul de unde a căzut prima dată până la sol.
(*Clasa a II-a*) **Andrei Stativă, elev, Iaşi**

P.88. Trăiau odată o babă şi un moşneag; moşul avea 100 ani, iar baba 90, amândoi erau albi ca iarna şi trişti ca vremea cea rea pentru că erau singuri. Se spune că ar fi avut un copil pe când vârsta babei era jumătate din jumătatea de acum a vârstei moşneagului şi că acesta ar fi plecat în lume când vârsta moşneagului era de două ori cât vârsta aceea a babei. Fiul nu s-a mai întors. Ce vârstă avea fiul când a plecat în lume?
(*Clasa a III-a*) **Înv. Ileana Roşcan, Iaşi**

P.89. La un concurs de biciclete, triciclete şi maşinuţe (cu patru roţi), tatăl lui Bogdan numără roţile vehiculelor şi observă că sunt 34. Câte vehicule au fost de fiecare fel? Găsiţi toate posibilităţile, ştiind că numărul vehiculelor de fiecare fel nu depăşeşte 5.
(*Clasa a III-a*) **Înv. Doiniţa Spânu, Iaşi**

P.90. Lungimea laturii unui pătrat este de 17 m. O persoană pleacă dintr-un vârf al pătratului şi, mergând în acelaşi sens pe laturile acestuia, parcurge o distanţă de 637 m. Din punctul în care a ajuns se întoarce şi parcurge 773 m. Aflaţi la ce distanţă se va situa în final persoana faţă de punctul de plecare.
(*Clasa a III-a*) **Oxana Pascal, elevă, Iaşi**

P.91. Se împart două numere naturale. Dacă împărţitorul, câtul şi restul sunt trei numere consecutive cu suma 30, să se afle deîmpărţitul.
(*Clasa a IV-a*) **Vasile Solcanu, Bogdăneşti, Suceava**

P.92. Observă regula şi completează, apoi verifică rezultatele găsite: $2+4=3+3$; $2+4+6=4+4+4$; $2+4+6+8=5+5+5+5$; $2+4+6+\cdots+12=\square$; $2+4+6+\cdots+14=\square$; $\ldots$; $2+4+6+\cdots+(a+a)=\square$.
(*Clasa a IV-a*) **Valeria Gheorghiţă, elevă, Iaşi**

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2005.

P.93. O foaie de hârtie dreptunghiulară se îndoaie de-a lungul de 6 ori, formându-se 7 benzi egale şi suprapuse. Dreptunghiul obţinut se îndoaie de-a latul de 9 ori, rezultând în final un pătrat cu perimetrul de 12 cm. Să se afle perimetrul dreptunghiului iniţial.
(*Clasa a IV-a*) **Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.56. Se consideră numărul $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{2005}$.
a) Să se arate că A nu este pătrat perfect.
b) Să se găsească 5 divizori mai mici decât 100 ai lui A.

Andrei Tofan, elev, Iaşi

V.57. Aflaţi restul împărţirii prin 47 a numărului $N = \overline{1268\underbrace{99\ldots9}_{2005 \text{ cifre}}}$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

V.58. Aflaţi numerele naturale x, y, z cu proprietatea că
$$2^{4x+1} + 2^{3y+1} + 2^{2z+1} = 9248.$$

Cristian - Cătălin Budeanu, Iaşi

V.59. Dacă $\overline{a_1a_2\ldots a_n}^2 - \overline{b_1b_2\ldots b_n}^2 = \overline{c_1c_2\ldots c_n}^2$, să se arate că
$$\overline{a_1a_2\ldots a_na_1a_2\ldots a_n}^2 - \overline{b_1b_2\ldots b_nb_1b_2\ldots b_n}^2 = \overline{c_1c_2\ldots c_nc_1c_2\ldots c_n}^2.$$

Petru Asaftei, Iaşi

V.60. Să se determine ultimele două cifre ale numărului $7^{9^{9^9}}$.

Artur Bălăucă, Botoşani

Clasa a VI-a

VI.56. Determinaţi, în funcţie de numărul întreg x, cel mai mare divizor comun al numerelor $2005x + 2$ şi $2006x + 3$.

Tamara Culac, Iaşi

VI.57. Un vânzător de autoturisme scade procentul beneficiului său de la 25% la 20% din valoarea vânzărilor. Datorită scăderii preţurilor, creşte valoarea vânzărilor. Aflaţi procentul cu care a crescut valoarea vânzărilor, ştiind că beneficiul a crescut cu 10%.

Marius Farcaş, Iaşi

VI.58. Se aşează cifrele 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 într-o ordine oarecare obţinând un număr A. Se aşează apoi aceleaşi cifre în altă ordine, obţinând numărul $B \neq A$. Să se arate că A nu se divide cu B.

Cristian - Cătălin Budeanu, Iaşi

VI.59. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{B}) = 120°$. Dacă mediana $[BM]$ este perpendiculară pe BC, arătaţi că $AB = 2BC$.

Bogdan Posa, elev, Motru (Gorj)

VI.60. Fie $\triangle ABC$ şi punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ şi $M \in (BC)$ astfel încât $AE = EB$, iar între $\triangle AEF$ şi $\triangle EFM$ să existe o congruenţă. Să se arate că:
a) F este mijlocul lui $[AC]$;
b) $[AM]$ este mediană sau înălţime.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Clasa a VII-a

VII.56. Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$ cu $x^2 - 2y = y^2 + xy = 4$. Să se arate că $x^2 - 2x = y^2$.

Gigel Buth, Satu Mare

VII.57. Fie $x \in (0, 1)$, iar $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Arătaţi că $nx^2 + 2^n > n + (1 + x)^n$.

Ion Vişan, Craiova

VII.58. Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât mediile aritmetică, geometrică şi armonică ale lor să fie laturi ale unui triunghi dreptunghic. Aflaţi sinusul celui mai mic dintre unghiurile triunghiului.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

VII.59. Fie $\triangle\mathbf{ABC}$ şi A' mijlocul lui $[BC]$. Dacă $D \in (AC)$, $BD \cap AA' = \{F\}$ şi paralela prin F la BC taie AC în E, să se arate că $\dfrac{1}{DE} = \dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{CE} + \dfrac{1}{AC}$.

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

VII.60. În cercul $\mathcal{C}$ se consideră coardele $[AM]$ şi $[AN]$astfel încât $AM < AN$.

1) Să se determine mulţimea punctelor $X \in \mathcal{C}$ ce îndeplinesc condiţia $AM \leq AX \leq AN$.

2) În ce caz mulţimea găsită este un arc de cerc?

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.56. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ pentru care $x^3 - y^3 + z^3 = 8$, $x - y + z = 2$.

Andrei - Sorin Cozma, elev, Iaşi

VIII.57. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Să se arate că

$$\frac{1}{\sqrt{(1-a)(1-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-b)(1-c)}} + \frac{1}{\sqrt{(1-c)(1-a)}} \geq \frac{9}{2}.$$

Cristian Săvescu, elev, Focşani

VIII.58. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ cu $x + y + z \geq 3$. Să se arate că $x^n + y^n + z^n \geq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Romeo Ilie, Braşov

VIII.59. Determinaţi $x, y, z \in \mathbb{R}$, ştiind că $x+y+z = 1$, iar $xy+(x+y)(z+1) = \dfrac{4}{3}$.

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

VIII.60. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ şi $AA' = 3\sqrt{3}$. Să se arate că pentru fiecare număr $a \in \left(0, 3\sqrt{3}\right)$, există exact două puncte M_a', M_a'' pe dreapta CC' astfel încât $d(B', (M_a'AB)) = d(B', (M_a''AB)) = a$.

Mirela Marin, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.56. Determinaţi numerele reale pozitive x, y, z, t pentru care $x+y+z+t = 20$, iar $xy + xz + xt + yz + yt + zt + 475 = xyzt$.

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache, Craiova

IX.57. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$f\left(f\left(f\left(x\right)+y\right)\cdot f\left(x-f\left(y\right)\right)\right)=x^2-y^2,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

IX.58. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinaţi $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},c\in\mathbb{R}$ pentru care

$$[x]+[x+a_1]+\cdots+[x+a_{n-1}]=[cx],\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

(*În legătură cu G.42 din RecMat 1/2003.*)

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

IX.59. Fie $\mathcal{C}\left(I,r\right)$ cercul înscris în $\triangle ABC$. Să se arate că

$$IA\cdot IB+IB\cdot IC+IC\cdot IA\geq 12r^2.$$

D. M. Bătineţu - Giurgiu, Bucureşti

IX.60. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $a<b<c$. Cercul $\mathcal{C}\left(I,r\right)$ înscris triunghiului este tangent dreptelor BC, CA şi AB în punctele D, E şi respectiv F. Dreapta ID intersectează CA în D' şi AB în D'', IE intersectează AB în E' şi BC în E'', iar IF intersectează BC în F' şi CA în F''. Arătaţi că $E'E''=D'D''+F'F''$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

Clasa a X-a

X.56. Fie tetraedrul $ABCD$ şi M un punct în spaţiu. Dacă G, G_A, G_B, G_C, G_D sunt centrele de greutate ale tetraedrelor $ABCD$, $MBCD$, $MACD$, $MABD$, respectiv $MABC$, să se arate că $\overrightarrow{AG_A}+\overrightarrow{BG_B}+\overrightarrow{CG_C}+\overrightarrow{DG_D}=\overrightarrow{0}$ dacă şi numai dacă $M\equiv G$.

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

X.57. Dacă $x,y,a\in(1,\infty)$, să se arate că

$$\left(x+y+\log_a x\right)\left(xy+\log_a x^{x+y}\right)+\left(x+y+\log_a y\right)\left(xy+\log_a y^{x+y}\right)\geq$$
$$\geq\left(x+\sqrt{xy}+y\right)\log_a xy.$$

Mihail Bencze, Braşov

X.58. Let $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2\ln\frac{k^2+n^2}{n^2}<\binom{2n-2}{n-1}.$$

José Luis Díaz - Barrero, Barcelona, Spain

X.59. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n\geq 3$ ce admite n rădăcini reale, pozitive şi subunitare. Dacă $|f(0)|=f(1)$, să se arate că produsul rădăcinilor este cel mult egal cu $\dfrac{1}{2^n}$.

Ioan Şerdean, Orăştie

X.60. Fie $k\in\mathbb{N}^*$ fixat. Alegem $n\in\{1,2,\ldots,k\}$ şi $a_1,a_2,\ldots,a_n$ numere prime mai mari decât 3. Dacă probabilitatea ca $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$ să se dividă cu 24 este cel puţin egală cu $\dfrac{1}{24}$, să se arate că 24 divide k.

Cristian Săvescu, elev, Focşani

Clasa a XI-a

XI.56. Let n be a positive integer. For each positive integer k, let F_k be the k^{th}

Fibonacci number ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ for all $k \geq 1$). Prove that

$$\begin{vmatrix} F_n^2 & F_{n+1}^2 & 2F_nF_{n+1} - F_{n+2}^2 \\ F_{n+2}^2 & -2F_{n+1}F_{n+2} - F_n^2 & F_{n+1}^2 \\ -2F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 & F_{n+2}^2 & F_n^2 \end{vmatrix} = 0.$$

José Luis Díaz - Barrero, Barcelona, Spain

XI.57. Fie pătratul $ABCD$ circumscris cercului $\mathcal{C}$. În pătrat se înscrie octogonul $EFGHIJKL$, circumscris cercului $\mathcal{C}$, astfel încât $E, F \in (AB)$, $E \in (AF)$, $G, H \in (BC)$, $G \in (BH)$, $I, J \in (CD)$, $I \in (CJ)$, $K, L \in (DA)$, $K \in (DL)$. Fie $\{M\} = EL \cap AC$, $\{N\} = FG \cap BD$, $\{P\} = HI \cap AC$, $\{Q\} = JK \cap BD$. Să se arate că suma

$$S = \frac{AE}{EB} + \frac{BF}{FA} + \frac{BG}{GC} + \frac{CH}{HC} + \frac{CI}{ID} + \frac{DJ}{JC} + \frac{DK}{KA} + \frac{AL}{LD} + \frac{AM}{MC} + \frac{BN}{ND} + \frac{CP}{PA} + \frac{DQ}{QB}$$

nu depinde de alegerea vârfurilor octogonului pe laturile pătratului.

Cătălin Calistru, Iaşi

XI.58. Dacă n este un număr natural iar p un număr prim, atunci şirul $\left(x_{n+1}(p) - x_n(p)\right)_{n \geq 0}$ este divergent, unde $x_n(p)$ reprezintă exponentul cu care apare numărul p în descompunerea lui $n!$.

Sorin Puşpană, Craiova

XI.59. Fie şirul de numere supraunitare $(a_n)_{n \geq 1}$, astfel ca $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \{xa_n\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

Dan Popescu, Suceava

XI.60. Fie $a \in (0, 1)$; să se demonstreze că pentru orice $x > -\dfrac{2}{\ln a}$ este valabilă inegalitatea $(1 - a^x)^{\frac{1}{x+1}} < \left(1 - a^{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Angela Ţigăeru, Suceava

Clasa a XII-a

XII.56. Fie S_n mulţimea permutărilor de ordin n, iar $\sigma \in S_n$. Se consideră funcţia mărginită $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(f(\sigma(1)) + \frac{1}{2} f(\sigma(2)) + \cdots + \frac{1}{n} f(\sigma(n)) \right).$$

(*O generalizare a problemei 24131, G. M. 5-6/1999.*)

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

XII.57. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$$G = \left\{ X_a \mid X_a = I_2 + aA, a \in \left(-\frac{1}{2}, \infty \right) \right\}.$$

Arătaţi că $(G, \cdot)$ este grup izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$. Calculaţi $X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdots X_{\frac{2n-1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XII.58. Let $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ be a continuous function. Prove that

$$\sqrt{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-(f(x))^2}dx+\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\leq 4.$$

Zdravko Starc, Vršac, Serbia and Montenegro

XII.59. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f derivabilă şi neconstantă pe nici un interval al lui $\mathbb{R}$. Dacă

$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\geq f'(\sin x)\cos x+f'(\cos x)\sin x,\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

demonstraţi că nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

XII.60. Fie $n>1$ şi $a_1,a_2,\ldots,a_n\in(0,1)$ astfel încât $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. Să se determine funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ şi $f(x)=f(a_1x)+f(a_2x)+\cdots+f(a_nx)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Gabriel Dospinescu, Paris

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **tbi@math.tuiasi.ro**, **vpgeo@lycos.co.uk**, **profgpopa@yahoo.co.uk** . Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc.
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la *orice iubitor de matematici elementare* (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- Lucrările originale ale elevilor vor fi publicate într-o rubrică specială dedicată acestora: **NOTA ELEVULUI** . Anual, se vor acorda elevilor - autori două premii în bani, pentru cele mai bune note publicate în revistă.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

Probleme pentru pregătirea concursurilor[1]

A. Nivel gimnazial

G76. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale sistemul $\begin{cases} x^2 - y = u^2 \\ y^2 - z = v^2 \\ z^2 - x = t^2 \end{cases}$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

G77. *i)* Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a > b > c$; atunci $\dfrac{a^2}{a-b} + \dfrac{b^2}{b-c} > a + 2b + c$.

ii) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a \geq b \geq c > 0$; atunci $\dfrac{a^2 - b^2}{c} + \dfrac{c^2 - b^2}{a} + \dfrac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$.

Ioan Şerdean, Orăştie

G78. Dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)} + \frac{c(b+d)}{d(b+c)} + \frac{d(a+c)}{a(d+c)} + \frac{a(b+d)}{b(a+d)} \geq 4.$$

Artur Bălăucă, Botoşani

G79. Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ sunt astfel încât $x + y + z = xyz$, atunci

$$xy + yz + zx \geq 3 + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}.$$

Florina Cârlan şi Marian Tetiva, Bârlad

G80. Fie A mulţimea tuturor sumelor de tipul $\pm 1^2 \pm 3^2 \pm 5^2 \pm \cdots \pm (2n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$, unde semnele $\pm$ pot fi alese în orice combinaţie posibilă. Să se arate că $A = \mathbb{Z}$. (*În legătură cu teorema Erdös-Surányi.*)

Petru Asaftei, Iaşi

G81. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Să se arate că există o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ cu n elemente care are exact k submulţimi cu suma elementelor strict pozitivă.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

G82. Un cal se află pe tabla de şah în câmpul $A1$ şi dorim să-l ducem pe poziţia $H8$ într-un număr minim de sărituri. Aflaţi care este acest număr minim, precum şi câte trasee de lungime minimă există.

Gheorghe Crăciun, Plopeni şi Gabriel Popa, Iaşi

G83. Fie $ABCD$ patrulater convex şi punctele $M, N \in (AB)$, $P, R \in (CD)$ astfel încât $AD \cap BC \cap MR \cap NP \neq \emptyset$. Să se arate că $\dfrac{BM}{MN} \cdot \dfrac{NA}{DP} \cdot \dfrac{PR}{RC} \cdot \dfrac{CD}{AB} = 1$.

Andrei-Sorin Cozma, elev, Iaşi

G84. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \| CD$, $AB < CD$. Se consideră punctele $E \in (AD)$ şi $F \in (BC)$ astfel încât $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{CF}{FB}$. Dreapta EF intersectează BD şi AC în M, respectiv N. Să se arate că $\dfrac{MN}{EF} = \dfrac{DC - AB}{DC + AB}$.

Andrei Nedelcu, Iaşi

[1] Se primesc soluţii până la data de 31 decembrie 2005.

G85. Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor unghiurilor $\triangle ABC$. Pe latura (BC) considerăm punctele D şi E astfel încât $D \in (BE)$ şi cevienele AD şi AE sunt izogonale. Să se demonstreze că DB' şi EC' se intersectează pe AA'. (*În legătură cu Propoziţia 1, p. 99, RecMat - 2/2004.*)

Titu Zvonaru, Comăneşti

B. Nivel liceal

L76. Fie cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ tangente interior unui cerc $\mathcal{C}$ în punctele distincte M, respectiv N. Cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt secante sau tangente exterior iar axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi B. Dreptele AM şi AN taie din nou cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ în K, respectiv L. Arătaţi că $AB \geq 2KL$. În ce caz avem egalitate?

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L77. Fie punctele $P_1, P_2, \ldots, P_{13}$ în plan astfel încât oricare trei sunt necoliniare şi toate au coordonate întregi. Să se arate că există cel puţin un triunghi $P_iP_jP_k$ astfel încât centrul său de greutate să aibă coordonate întregi.

Vasile Pravăţ şi Titu Zvonaru, Comăneşti (Bacău)

L78. Considerăm şirul de puncte $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pe cercul trigonometric astfel încât $m(\widehat{P_nOP_{n+1}}) = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{P_nOP_{n+1}}$ fiind considerat ca unghi orientat. Să se arate că pentru orice punct P pe cercul trigonometric există $j \in \mathbb{N}$ astfel încât $P_j \in \operatorname{Int}\mathcal{C}\left(P, \dfrac{1}{2005}\right)$.

Lucian - Georges Lăduncă şi Andrei Nedelcu, Iaşi

L79. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ în aşa fel încât $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ şi $\max\{|a_i - a_j|\,; 1 \leq i < j \leq n\} \leq 1$. Demonstraţi că $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \leq \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{n}{2}\right]\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ şi precizaţi în ce caz are loc egalitate.

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

L80. Fie un alfabet cu 4 litere a, b, c, d. În acest alfabet se pot forma cuvinte după următoarele reguli: după a nu poate urma b, după b nu poate urma c, după c nu poate urma d şi după d nu poate urma a. Câte cuvinte palindromice de lungime n, $n \geq 2$, se pot forma conform acestor reguli? (Prin *cuvânt palindromic* înţelegem un cuvânt în care litera de pe poziţia k coincide cu litera de pe poziţia $n - k + 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.)

Irina Mustaţă, elevă, Iaşi

L81. Fie $n \geq 1$ un număr natural fixat. O tablă infinită de şah este colorată în alb şi negru în maniera obişnuită. O mulţime C de căsuţe ale tablei se numeşte *conexă* dacă putem ajunge din fiecare căsuţă a lui C în fiecare altă căsuţă a lui C printr-o succesiune de deplasări în C dintr-o căsuţă într-o căsuţă vecină (cu o latură comună). Fie S o mulţime conexă cu $4n$ căsuţe. Numim *raportul cromatic* al mulţimii S raportul dintre numărul de căsuţe albe şi numărul de căsuţe negre din S. Să se afle cea mai mică şi cea mai mare valoare posibilă a raportului cromatic.

Adrian Zahariuc, elev, Bacău

L82. Determinaţi $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ pentru care $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{p(x) + \sin q(x)\}$ este periodică, unde $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţiile polinomiale asociate lui P, respectiv Q.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

L83. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}-n\right].$$

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L84. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ şi

$$A=\Big\{x>0;\quad x=a_0+a_1\sqrt[n]{n}+\cdots+a_{n-1}\sqrt[n]{n^{n-1}};$$
$$a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z};\quad n-1\mid a_0+a_1+\cdots+a_n\Big\}.$$

Determinaţi $\inf A$.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

L85. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie pentru care mulţimea punctelor în care f are limită finită la stânga este densă în $\mathbb{R}$. Să se arate că mulţimea punctelor în care f este continuă este de asemenea densă în $\mathbb{R}$. (O mulţime $D\subset\mathbb{R}$ se numeşte *densă* în $\mathbb{R}$ dacă orice interval deschis al axei reale conţine măcar un element din D.)

Gabriel Dospinescu, Paris, şi Marian Tetiva, Bârlad

Training problems for mathematical contests

A. Junior high school level

G76. Solve the system $\begin{cases} x^2-y=u^2\\ y^2-z=v^2\\ z^2-x=t^2\end{cases}$ in the set of natural numbers.

Adrian Zanoschi, Iaşi

G77. *i*) Prove that $\dfrac{a^2}{a-b}+\dfrac{b^2}{b-c}>a+2b+c$ for any $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a>b>c$.

ii) Prove that $\dfrac{a^2-b^2}{c}+\dfrac{c^2-b^2}{a}+\dfrac{a^2-c^2}{b}\geq 3a-4b+c$ for any $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\geq b\geq c>0$.

Ioan Şerdean, Orăştie

G78. Prove that

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)}+\frac{c(b+d)}{d(b+c)}+\frac{d(a+c)}{a(d+c)}+\frac{a(b+d)}{b(a+d)}\geq 4$$

for any $a,b,c,d\in(0,\infty)$.

Artur Bălăucă, Botoşani

G79. Prove that

$$xy+yz+zx\geq 3+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}$$

for any $x,y,z\in(0,\infty)$ such that $x+y+z=xyz$.

Florina Cârlan and Marian Tetiva, Bârlad

G80. Let A be the set of all sums of type $\pm 1^2 \pm 3^2 \pm 5^2 \pm \cdots \pm (2n+1)^2$, $n \in \mathbb{N}$, for any combination of the signs. Prove that $A = \mathbb{Z}$. (*Regarding Erdös-Surányi theorem.*)

Petru Asaftei, Iaşi

G81. Let $n \in \mathbb{N}^*$ and $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Prove that there exists a set $A \subset \mathbb{R}$ with n elements which has precisely k subsets whose sum of elements are strictly positive.

Adrian Zahariuc, high school student, Bacău

G82. Find minimal number of moves required to transfer a knight on a chessboard from the square $A1$ to the square $H8$. For this minimal number, find the number of distinct paths of minimal length.

Gheorghe Crăciun, Plopeni, and Gabriel Popa, Iaşi

G83. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let $M, N \in (AB)$, $P, R \in (CD)$ such that $AD \cap BC \cap MR \cap NP \neq \emptyset$. Prove that $\dfrac{BM}{MN} \cdot \dfrac{NA}{DP} \cdot \dfrac{PR}{RC} \cdot \dfrac{CD}{AB} = 1$.

Andrei-Sorin Cozma, junior high school student, Iaşi

G84. Let $ABCD$ be a trapezoid with $AB \| CD$, $AB < CD$. Consider $E \in (AD)$ and $F \in (BC)$ such that $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{CF}{FB}$. The line EF meets BD and AC in M, respectively in N. Prove that $\dfrac{MN}{EF} = \dfrac{DC - AB}{DC + AB}$.

Andrei Nedelcu, Iaşi

G85. Let ABC be a given triangle and let A', B', C' be the legs of its bisectors. Let D, E be points on the side (BC) such that $D \in (BE)$ and the cevians AD and AE are isogonal. Prove that DB' and EC' intersect each other in a point situated on AA'. (*Regarding Proposition 1, p. 99, RecMat - 2/2004.*)

Titu Zvonaru, Comăneşti

B. High school level

L76. Let $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ be circles which are internally tangent to a given circle $\mathcal{C}$ in M, respectively in $N, M \neq N$. Suppose that $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ are secant or externally tangent and that the radical axis of $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ meets $\mathcal{C}$ in A and B. Let us denote by K, respectively by L, the points in which the lines AM, AN meet again $\mathcal{C}_1$, respectively $\mathcal{C}_2$. Prove that $AB \geq 2KL$ and characterize the case of equality.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L77. Let P_1, P_2, $\ldots$, P_{13} points with integer coordinates in a plane such that any given three are not collinear. Prove that there exists at least a triangle $P_iP_jP_k$ such that its centroid has integer coordinates.

Vasile Pravăţ and Titu Zvonaru, Comăneşti (Bacău)

L78. Consider $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of points on the unit circle such that $m(\widehat{P_nOP_{n+1}}) = \operatorname{arctg} \dfrac{5}{12}$ for all $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{P_nOP_{n+1}}$ being considered as an oriented angle. Prove that for any point P on the unit circle there exists $j \in \mathbb{N}$ such that

$P_j \in \operatorname{Int} \mathcal{C}\left(P, \dfrac{1}{2005}\right)$.

Lucian Lăduncă and Andrei Nedelcu, Iaşi

L79. Let $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ be such that $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ and $\max\{|a_i - a_j|; 1 \leq i < j \leq n\} \leq 1$. Prove that $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{n}{2}\right]\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ and characterize the case of equality.

Marius Pachiţariu, high school student, Iaşi

L80. Consider an alphabet with four letters a, b, c, d. Using this alphabet, one can construct words according to the following rules: b cannot succeed a, c cannot succeed b, d cannot succeed c and a cannot succeed d. How many palyndromes of length n, $n \geq 2$, can one construct in this manner? (By *palyndrome* we mean a word in which the k-th letter coincides with the $n-k+1$-th letter for all $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.)

Irina Mustaţă, high school student, Iaşi

L81. Let $n \geq 1$ be a fixed natural number. An infinite chessboard is colored in black and white in the usual manner. A set C of squares is then called *connected set* if one can reach any square in C starting from any given square in C through a succession of moves in C from a square to a neighboring square (with a common edge).

Let S be a connected set with $4n$ squares. One calls the *chromatic index* of S the quotient between the number of white squares and the number of black squares. Find the maximal and the minimal value of the chromatic index.

Adrian Zahariuc, high school student, Bacău

L82. Find $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ such that $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{p(x) + \sin q(x)\}$ is periodic where $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are the polynomial functions associated to P, respectively to Q.

Paul Georgescu and Gabriel Popa, Iaşi

L83. Find

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} - n\right].$$

Marius Olteanu, Râmnicu Vâlcea

L84. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ and

$$A = \Big\{x > 0;\quad x = a_0 + a_1\sqrt[n]{n} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{n^{n-1}};$$
$$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z};\quad n-1 \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n\Big\}.$$

Find $\inf A$.

Paul Georgescu and Gabriel Popa, Iaşi

L85. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a function such that the set of points in which f has finite left-sided limit is dense in $\mathbb{R}$. Prove that the set of continuity points of f is also dense in $\mathbb{R}$. (A subset D of $\mathbb{R}$ is called *dense* in $\mathbb{R}$ if any open interval of $\mathbb{R}$ contains at least an element of D.)

Gabriel Dospinescu, Paris, and Marian Tetiva, Bârlad