Probleme propuse

Clasele primare

P.64. Într-o piesă de teatru sunt 12 personaje, copii şi adulţi. Câţi copii joacă în piesă, dacă la fiecare doi adulţi corespunde un copil?
(*Clasa I*) **Alexandra Radu, elevă, Iaşi**

P.65. Se dau jetoanele $\boxed{\text{AT}}$ $\boxed{\text{II}}$ $\boxed{\text{CRE}}$ $\boxed{\text{ŢII}}$ $\boxed{\text{AŢII}}$ $\boxed{\text{RECR}}$ $\boxed{\text{EA}}$ $\boxed{\text{RE}}$ $\boxed{\text{REC}}$. Care este numărul cel mai mare de jetoane cu care se poate forma cuvântul "RECREAŢII"?
(*Clasa I*) **Oxana Pascal, elevă, Rep. Moldova**

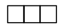
P.66. Într-o livadă sunt tot atâţia peri cât şi meri. Sunt 6 rânduri cu peri şi 4 rânduri cu meri. Numărul merilor de pe un rând întrece cu 5 numărul perilor de pe un rând. Câţi pomi sunt în acea livadă?
(*Clasa II-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.67. Dintr-o mulţime de 5 copii, orice grupare de trei conţine cel puţin o fată. Câţi băieţi pot fi în mulţime?
(*Clasa II-a*) **Andreea Surugiu, elevă, Iaşi**

P.68. Dacă Ina ar împărţi numărul nucilor culese de ea la numărul nucilor culese de sora sa, ar obţine 7 rest 6. Ştiind că Ina a cules cu 78 nuci mai mult decât sora sa, aflaţi câte nuci a cules fiecare.
(*Clasa III-a*) **Înv. Doiniţa Spânu, Iaşi**

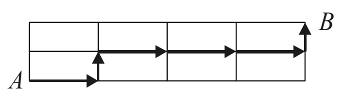
P.69. Într-o împărţire cu rest, în care împărţitorul este mai mare ca nouă, mărind împărţitorul cu o unitate şi efectuând din nou împărţirea obţinem câtul 9 şi restul 0. Aflaţi câtul şi restul împărţirii iniţiale.
(*Clasa III-a*) **Înv. Mariana Toma, Muncelu de Sus (Iaşi)**

P.70. Într-o tabără internaţională de matematică sunt elevi din patru ţări: Bulgaria, Grecia, Republica Moldova şi România. Dacă 21 elevi nu sunt din Bulgaria, 23 nu sunt din Grecia, 22 elevi nu sunt din Republica Moldova şi 21 elevi nu sunt din România, câţi elevi sunt din fiecare ţară?
(*Clasa III-a*) **Georgiana Ciobanu, elevă, Iaşi**

P.71. Fiecare pătrat din figura alăturată  se colorează cu o altă culoare. În câte moduri putem face acest lucru având la dispoziţie patru culori?
(*Clasa IV-a*) **Înv. Cătălina Raţă, Coarnele Caprei (Iaşi)**

P.72. Aruncăm două zaruri şi adunăm punctele de pe cele două feţe de deasupra. *a*) Câte sume diferite putem obţine? *b*) Câte sume se pot forma în trei moduri diferite?
(*Clasa IV-a*) **Înv. Gheorghe Toma, Muncelu de Sus (Iaşi)**

P.73. În figura alăturată este pus în evidenţă un drum format din şase segmente care pleacă din A şi ajunge în B. Câte drumuri de felul acesta se pot construi?



(*Clasa IV-a*) **Înv. Constantin Raţă, Coarnele Caprei (Iaşi)**

Clasa a V-a

V.46. Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $11^n + 9^n$ şi $11^n - 9^n$ sunt simultan pătrate perfecte.

Andrei - Sorin Cozma, elev, Iaşi

V.47. Să se arate că numărul $\overline{51a51a}$ nu poate fi scris ca produsul a patru numere prime.

Cătălin Budeanu, Iaşi

V.48. Se consideră fracţiile $x_1 = \dfrac{9}{14}$, $x_2 = \dfrac{10}{21}$, $x_3 = \dfrac{11}{28}$, $\ldots$. Scrieţi fracţia x_{1000} şi apoi ordonaţi crescător primele 1000 de fracţii.

Dumitru Gherman, Paşcani

V.49. Determinaţi numărul tripletelor $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ dacă $3a + 2b + c = 598$ şi $a + 2b + 3c = 602$. Dacă în plus $a < b < c$, determinaţi a, b şi c.

Gheorghe Iurea, Iaşi

V.50. Câte numere de 7 cifre se pot scrie folosind cifrele 1, 2 şi 3, astfel încât 1 să apară de 2 ori, 2 să apară de 3 ori şi 3 să apară de 2 ori? Dar dacă în locul cifrelor 1, 2 şi 3 considerăm cifrele 0, 1 şi respectiv 2?

Petru Asaftei, Iaşi

Clasa a VI-a

VI.46. Suma dintre opusul unui număr natural şi inversul altui număr natural este $-119,992$. Să se determine numerele.

Ciprian Baghiu, Iaşi

VI.47. Aflaţi restul împărţirii numărului $N = 2844^{2844} + 4107^{4107} + 6398^{6398}$ prin 79.

Tamara Culac, Iaşi

VI.48. *a*) Într-o proporţie cu termeni nenuli, un extrem este suma celorlalţi trei termeni dacă şi numai dacă celălalt extrem are inversul egal cu suma inverşilor celorlalţi trei termeni.
b) Dacă din patru numere raţionale nenule distincte unul este suma celorlalţi trei, iar altul are inversul egal cu suma inverselor celorlaltor trei, atunci numerele sunt termeni ai unei proporţii.

Claudiu - Ştefan Popa, Iaşi

VI.49. Să se arate că orice număr natural relativ prim cu 10 admite un multiplu care se scrie folosind numai cifra 3.

Lucian - Georges Lăduncă, Iaşi

VI. 50. Fie $\triangle ABC$ cu $[AC] \equiv [BC]$, D mijlocul lui $[AB]$, P un punct pe dreapta AB, iar M şi L picioarele perpendicularelor din P pe AC, respectiv BC. Să se arate că $[DM] \equiv [DL]$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

Clasa a VII-a

VII.46. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţiile:
a) $x^{100} + x^{77} + x^{50} + x^{21} + x^{10} + x^5 + 1 > 0$;
b) $x^{100} - x^{77} + x^{50} - x^{21} + x^{10} - x^5 + 2 < 0$.

Vasile Solcanu, Bogdăneşti (Suceava)

VII.47. Să se rezolve în $\mathbb{Z}^2$ ecuaţia $u^2v + uv^2 = 2u^2 + 2v^2 - 40$.

Mihai Crăciun, Paşcani

VII.48. Dacă $a_i = i + \sqrt{i}$, $\forall i = \overline{1, 2004}$, precizaţi dacă numărul

$$N = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 + \cdots + a_{2001} - a_{2002} - a_{2003} + a_{2004}$$

este negativ, pozitiv sau nul.

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

VII.49. Fie $\triangle ABC$ echilateral şi $D \in (BC)$. Notăm cu M_1, M_2 mijloacele segmentelor $[BD]$, respectiv $[CD]$. Paralela prin M_1 la AC intersectează AB în F, iar paralela prin M_2 la AB intersectează AC în E. Să se arate că dreptele AD, M_1E şi M_2F sunt concurente.

Nicolae Gross şi Lucian Tuţescu, Craiova

VII. 50. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $[AB]$ şi $[CD]$. O paralelă la baze intersectează AD, AC, BD şi BC în punctele E, F, G şi respectiv H. Să se arate că $EH = 3FG$ dacă şi numai dacă DF, CG şi AB sunt drepte concurente.

Adrian Zanoschi, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.46. Să se demonstreze că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} = 2003$.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

VIII.47. Pentru $\forall x \in (0, \infty)$, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{\left(x^5+x^3+x^2+1\right)\left(x^3+x^2+2\right)+\left(x^4+x^3+x+1\right)\left(x^3+x+2\right)+\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)}{x^6+x^5+x^4+2x^3+x^2+x+1} \geq 6.$$

Mircea Coşbuc, elev, Iaşi

VIII.48. Găsiţi numerele prime p şi q pentru care $p^2 + q = 37q^2 + p$.

Liviu Smarandache, Craiova

VIII.49. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în A cu $AB = AC = a$. Considerăm $MA \perp$ $\perp (ABC)$, $MA = a\sqrt{2}$ şi $N \in AM$ astfel încât $m(\widehat{CN, BM}) = 60°$. Să se afle lungimea segmentului $[AN]$.

Romanţa Ghiţă şi Ioan Ghiţă, Blaj

VIII.50. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AB = BC$, $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 90°$, $m(\widehat{B}) \leq 90°$ şi fie O mijlocul lui $[BD]$. Pe perpendiculara în O pe planul (ABC) se ia un punct V astfel încât $OV = OB$. Să se arate că $d\,(D, (VAB)) = 2\,d\,(D, (VAC))$ dacă şi numai dacă $m(\widehat{ABC}) = 60°$.

Monica Nedelcu, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.46. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt[2n]{x-2} = 2$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Popescu, Suceava

IX.47. Să se determine şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere strict pozitive pentru care

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n^2 = (-1)^{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \quad \forall n \geq 1.$$

Marian Ursărescu, Roman

IX.48. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$. Să se arate că

$$\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt{ab}} \geq \frac{3}{2}.$$

Cezar Lupu, elev, Constanţa

IX.49. Să se arate că $\triangle ABC$ este isoscel în fiecare din ipotezele:
a) $2m_a + b = 2m_b + a$; *b*) $2m_a + a = 2m_b + b$.

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

IX.50. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ascuţitunghic ABC. Dacă A, B, C sunt măsurile în radiani ale unghiurilor triunghiului, iar $A \cdot \overrightarrow{IA} + B \cdot \overrightarrow{IB} + C \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$, să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.

Constantin Micu, Melineşti (Dolj)

Clasa a X-a

X.46. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $2^{x-1} + 2^{x^2-1} = \dfrac{y^2 + ay + a^2}{y^2 + a^2}$ să aibă soluţii în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Petru Răducanu, Iaşi

X.47. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte, cu $z_2 + z_3 = 2$ şi astfel încât $|z_1 - 1| = |z_2 - 1| = |z_3 - 1|$. Să se arate că $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3)$ este număr complex pur imaginar.

Lidia Nicola, Craiova

X.48. Se consideră planele paralele α şi β aflate la distanţa h unul de celălalt şi $\triangle ABC$ echilateral inclus în planul β.

a) Să se afle locul geometric al punctelor $M \in \alpha$ pentru care $MA^2 + h^2 = MB^2 + MC^2$.

b) Să se determine $M \in \alpha$ astfel încât suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ să fie minimă.

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

X.49. Să se arate că $\sin^3 x + \sin^3 y + \sin^3 z - 3 \sin x \sin y \sin z \geq$

$$\geq \frac{3}{4} \left[\sin x \left(1 - \cos(y - z)\right) + \sin y \left(1 - \cos(z - x)\right) + \sin z \left(1 - \cos(x - y)\right)\right],$$

$\forall x, y, z \in [0, \pi/3]$.

Marian Tetiva, Bârlad

X.50. Fie $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{1, n}$; notăm cu $f(p)$ numărul tripletelor (A, B, C) de submulţimi (nu neapărat nevide) cu reuniunea $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, oricare două disjuncte şi astfel încât numărul $\sum\limits_{i \in M \setminus A} a_i + \sum\limits_{i \in M \setminus B} b_i + \sum\limits_{i \in M \setminus C} c_i - p$ să fie multiplu de 3 (convenim ca $\sum\limits_{i \in \emptyset} x_i = 0$). Arătaţi că dacă $f(0) = f(1) = f(2)$, atunci există i pentru care $a_i + b_i + c_i \,\vdots\, 3$.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

Clasa a XI-a

XI.46. Determinaţi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pentru care $\det(A + B) = 2$ şi $\det(A + 3B) = 5$.

Cezar Lupu, elev, Constanţa

XI.47. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice cu $a_{ij} = \begin{cases} a, \text{ dacă } i = j \\ b, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$, unde $b \neq 0$ şi $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$. Arătaţi că A este inversabilă şi determinaţi A^{-1}.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI.48. Se defineşte şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ prin $x_n = x_{n-1}^2 - [x_{n-1}]$, $\forall n \geq 1$; $x_0 \in \in \left[0, \left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Cătălin Ţigăeru, Suceava

XI.49. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 0}$ şiruri de numere reale astfel încât $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, $|x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}| + |x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1}| \leq a_n$, $\forall n \geq 1$. Să se arate că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

XI.50. Fie $n \in 2\,\mathbb{N}$, iar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f\left(\dfrac{nx+y}{n+1}\right) \geq \geq f\left(\sqrt[n+1]{x^n y}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi crescătoare pe $[0, \infty)$. (În legătură cu *Problema 2819* din *Crux Mathematicorum*, nr. 2/2003.)

Titu Zvonaru, Bucureşti

Clasa a XII-a

XII.46. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian cu proprietatea că simetricul oricărui element $x \in [-1, 1]$ se află în $[-1, 1]$, unde $x * y = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

XII.47. Fie $G = (a, b)$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, iar "$\cdot$" înmulţirea numerelor reale. Să se determine a, b astfel încât $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right) \cong (G, \cdot)$ printr-un izomorfism de forma $f : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Alexandru Blaga şi Ovidiu Pop, Satu Mare

XII.48. Fie $(G, \cdot)$ grup de element neutru e şi $x, y \in G$ penrtru care avem:

a) $\exists k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ a. î. $x^k = e$; *b*) $\exists p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ a. i. $xy = y^p x$.

Să se arate că:

1) $xy^n x^{k-1} = y^{np}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; 2) $xy = yx \Leftrightarrow y^{n(p-1)} = e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mihai Haivas, Iaşi

XII.49. Se consideră numerele reale $b > a \geq 0$, $c \geq 1$ şi funcţiile continue $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{na}^{nb} g(x)\,dx = d \in \mathbb{R}$. Să se arate că şirul $(u_n)_{n\geq 1}$, $u_n = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{c + f(x) + g(nx)}\,dx$ este convergent şi să se afle limita sa.

D. M. Bătineţu - Giurgiu, Bucureşti

XII.50. Fie $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s(n!)}{\ln^k \ln n}$, unde $k \in \mathbb{N}$ este fixat.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G56. Fie $m \in \mathbb{Z}$, $n \in 2\,\mathbb{Z}+1$ fixate. Să se arate că ecuaţia $nx + y = m$, $x, y \in \mathbb{Z}$ are o unică soluţie (x_0, y_0) cu proprietatea că $|y_0| < |n|/2$.

Petru Asaftei, Iaşi

G57. Un şeic a lăsat moştenire celor doi fii ai săi cinci cămile, cu condiţia ca unul să primească jumătate, iar celălalt o treime. Moştenitorii nu şi-au putut împărţi averea, aşa că au apelat la un înţelept care trecea pe acolo, călare pe o cămilă. Cum a procedat înţeleptul?

Câte probleme asemănătoare mai putem formula (în care moştenirea este de n cămile, iar fiii primesc a p-a şi a q-a parte)?

Gabriel Popa, Iaşi

G58. Să se rezolve în $\mathbb{N}^2$ ecuaţia $2^x + 1 = 5^y$.

Irina Mustaţă, elevă, şi Valentina Blendea, Iaşi

G59. Fie $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid s(2000n) + s(2002n) = 2s(2001n)\}$, unde prin $s(x)$ am notat suma cifrelor lui x. Demonstraţi că orice număr natural nenul are un multiplu ce aparţine lui A.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

G60. Să se demonstreze că pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$ are loc

$$\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

G61. Să se demonstreze că pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$ are loc

$$\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)^3 \geq 54\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{abc} \geq 27\,\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

G62. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care se poate înscrie pătratul $MNPQ$ de centru O ($M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (AD)$). Să se arate că $AB + BC + CD + DA \geq \sqrt{2}\,(AO + BO + CO + DO)$. Când are loc egalitatea?

Lucian Tuţescu, Craiova şi Ioan Şerdean, Orăştie

G63. În $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 10^\circ$ şi $m(\widehat{B}) = 100^\circ$ construim $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ astfel ca $m(\widehat{MCB}) = 40^\circ$ şi $m(\widehat{NBC}) = 75^\circ$. Să se afle $m(\widehat{AMN})$.

Octavian Bondoc, Piteşti

G64. Prin punctul P al laturii (AC) a $\triangle ABC$ se duc paralele la medianele AA' şi CC', care intersectează laturile (BC) şi (AB) în E, respectiv F. Fie $\{M\} = EF \cap AA'$, $\{N\} = EF \cap CC'$, iar L şi Q mijloacele segmentelor $[FP]$, respectiv $[PE]$. Să se arate că dreptele ML, NQ şi $A'C'$ sunt concurente.

Andrei Nedelcu, Iaşi

G65. Fie $SABCD$ o piramidă cu baza $ABCD$ dreptunghi, M proiecţia lui D pe SB şi N proiecţia lui C pe SA, iar $\{P\} = AM \cap NB$. Ştiind că $M \in (SB)$ şi $N \in (SA)$, să se arate că $NP \cdot SA \cdot MB = SM \cdot AN \cdot PB$.

Daniel Ştefan Ninu, elev, Iaşi

A. Nivel liceal

L56. Fie $ABCD$ patrulater convex şi $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = AD \cap BC$. Considerăm $J \in (AQ)$, $L \in (BQ)$, $K \in (DP)$, $N \in (AP)$ astfel încât $QJ = AD$, $QL = CB$, $PK = DC$ şi $PN = AB$. Să se arate că $JL \parallel NK$.

Carmen Nejneru, Iaşi

L57. Fie $\triangle ABC$ înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi punctele $D \in (CB$, $D' \in (BC$ astfel încât $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$, $\widehat{BAD'} \equiv \widehat{ACB}$. Se mai consideră cercul $\mathcal{C}_1$ tangent la AD, BD şi la $\mathcal{C}$, cercul $\mathcal{C}_2$ tangent la AD', CD' şi la $\mathcal{C}$, iar $\{E\} = \mathcal{C}_1 \cap [BD]$, $\{F\} = \mathcal{C}_2 \cap [D'C]$. Să se arate că cercul circumscris $\triangle AEF$ şi cercul înscris în $\triangle ABC$ sunt concentrice.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L58. Pe muchiile $(Ox$, $(Oy$ şi $(Oz$ ale unui triedru oarecare se consideră punctele $A, L \in (Ox$, $B, M \in (Oy$ şi $C, N \in (Oz$ astfel încât $OA = OB = OC = a$ şi $OL = OM = ON = b$ $(a < b)$. Notăm $\alpha = m(\widehat{Oy, Oz})$, $\beta = m(\widehat{Oz, Ox})$, $\gamma = m(\widehat{Ox, Oy})$ şi $\{P\} = (AMN) \cap (BNL) \cap (CLM)$, $\{Q\} = (LBC) \cap (MCA) \cap (NAB)$. Să se calculeze distanţa PQ în funcţie de a, b, α, β, γ.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L59. Care este probabilitatea ca latura şi diagonalele unui romb, luate la întâmplare, să fie laturile unui triunghi?

Petru Minuţ, Iaşi

L60. Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ şi $B_1B_2 \ldots B_n$ $(n > 2)$ două poligoane înscrise în acelaşi cerc de centru O şi având centrele de greutate tot în O. Să se arate că putem renumerota vârfurile poligonului $A_1A_2 \ldots A_n$ pentru a obţine un nou poligon $A_{i_1}A_{i_2} \ldots A_{i_n}$ în care $A_{i_j} \neq B_j$ pentru $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

L61. Fie $n \geq 3$. Să se determine maximul expresiei $E = x_1^3x_2^2 + x_2^3x_3^2 + \cdots + x_n^3x_1^2 + (n-1)^{2(n-1)}x_1^3x_2^3 \cdots x_n^3$, când numerele nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au suma 1.

Gabriel Dospinescu, student, Bucureşti

L62. Rezolvaţi ecuaţia $2x^2 = y\,(y+1)$; $x, y \in \mathbb{N}$.

Mircea Bîrsan, Iaşi

L63. Fie $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un grup netrivial în raport cu produsul uzual al matricelor. Presupunem că există $X \in G$ astfel încât pe fiecare linie, respectiv coloană a sa să existe cel mult un element nenul şi acesta egal cu 1. Să se demonstreze că există $k \in \{1, 2, \ldots n\}$ astfel încât G este izomorf cu un subgrup al lui $GL_k(\mathbb{R})$ (s-a notat $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$).

Ovidiu Munteanu, Braşov

L64. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+2} = \dfrac{[x_{n+1}, x_n]}{x_{n+1}}$, $n \geq 1$. Dacă $x_{2003} = 2004$, demonstraţi că şirul nu este convergent.

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

L65. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = x^{2n}\cos(1/x)$, $\forall x < 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = x^{2n}\sin(1/x)$, $\forall x > 0$, iar $g(x) = x^{2n+1}\sin(1/x)$, $\forall x < 0$, $g(0) = 0$ şi $g(x) = x^{2n+1}\cos(1/x)$, $\forall x > 0$. Să se afle cel mai înalt ordin de derivabiliate al acestor funcţii şi să se studieze problema continuităţii acestor derivate în origine.

Gheorghe Costovici, Iaşi