Probleme propuse

Clasele primare

P.44. Un vecinul al unui vecin al numărului 81 este egal cu un vecin al unui vecin al numărului 77. Despre ce număr este vorba?
(*Clasa I*) **Mihaela Rusu, elevă, Iaşi**

P.45. Adunând trei numere naturale a, b, c obţinem suma 62. Primul număr este mai mare decât al treilea şi împreună au suma 12. Care sunt cele trei numere?
(*Clasa* a *II-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.46. Mihai, Dan şi Petru practică fiecare un alt fel de sport şi anume: tenis, fotbal sau volei. Mihai şi voleibalistul locuiesc în acelaşi bloc. Cel care joacă volei şi cel care joacă fotbal l-au urmărit pe Petru la un meci. Ce sport practică fiecare?
(*Clasa a II-a*) **Adina Dohotaru, elevă, Iaşi**

P.47. Diferenţa a două numere este 48. Această diferenţă este cu 22 mai mare decât jumătatea unuia dintre ele. Determinaţi numerele.
(*Clasa a III-a*) **Înv. Rodica Rotaru, Bârlad**

P.48. Un agricultor împarte un teren în trei parcele. În fiecare an, fiecare parcelă este cultivată numai cu una din culturile: grâu, porumb sau legume. Începând cu anul 2003, agricultorul se hotărăşte ca pe fiecare parcelă să fie altă cultură în trei ani consecutivi.

a) Care este primul an după 2003 în care se repetă culturile pe cele trei parcele?

b) Se poate preciza care este ordinea culturilor pe cele trei parcele în anul 2019?
(*Clasa a III-a*) **Andreea Surugiu, elevă, Iaşi**

P.49. La un moment dat, cerând unei persoane anul naşterii, aceasta răspunde: "anul acesta împlinesc 25 ani, iar dacă aş scrie toate numerele începând cu 1 şi terminând cu anul naşterii şi apoi toate numerele începând cu 1 şi terminând cu anul în care ne aflăm mi-ar trebui 13710 cifre. În ce an ne aflam când am pus întrebarea?
(*Clasa a III-a*) **Prof. Cătălin - Cristian Budeanu, Iaşi**

P.50. *a*) Câte numere trebuie adăugate şirului $1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots, 97, 98$ pentru a obţine toate numerele de la 1 la 98?

b) Efectuaţi $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \cdots + 97 + 98 - 2 \cdot (3 + 4 + 5 + \cdots + 34)$.
(*Clasa a IV-a*) **Georgiana Ciobanu, elevă, Iaşi**

P.51. Produsul a două numere naturale este 913 368. Unul din numere are cifra unităţilor şi cifra zecilor mai mare ca 2 şi mai mică decât 8. Dacă la acest număr mărim cifra zecilor cu 2 şi micşorăm cifra unităţilor cu 1, obţinem un produs egal cu 951 425. Aflaţi cele două numere.
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Elena Zărnescu, Iaşi**

P.52. În trei cutii sunt 212 bile. Din prima cutie se scoate un număr de bile, din a doua de 2 ori mai mult şi încă două bile, din a treia se scoate cât triplul numărului de bile scos din a doua cutie. În fiecare cutie rămâne un număr de bile egal cu numărul total al bilelor scos din cele trei cutii la un loc. Câte bile au fost în fiecare cutie?
(*Clasa a IV-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.53. Efectuând o singură cântărire, să se ia 475g dintr-un kilogram de zahăr

utilizând două greutăţi, una de 200g şi cealaltă de 150g.
(*Clasa a IV-a*) **Prof. Petru Asaftei, Iaşi**

Clasa a V-a

V.36. Fie n un număr impar, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ numere care împărţite la n dau câturi distincte şi resturi distincte. Arătaţi că valoarea minimă a sumei $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ este multiplu de 12.

Dragoş Ungureanu, elev, Iaşi

V.37. Comparaţi fracţiile $a = \dfrac{333331}{333334}$ şi $b = \dfrac{222221}{222223}$.

Maria Cojocaru, Iaşi

V.38. Să se arate că $2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e \neq 2003$, $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$.

Irina Ispas, studentă, Iaşi

V.39. Să se determine numerele prime $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ astfel încât numerele $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, $p_3 - p_2$, $p_4 - p_3$ să fie, de asemenea, prime.

Petru Minuţ, Iaşi

V.40. Este posibilă o partiţionare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, 12n + 9\}$ în $2n + 3$ submulţimi disjuncte, fiecare cu câte trei elemente, astfel încât în fiecare submulţime un element să fie suma celorlaltor două?

Titu Zvonaru, Bucureşti

Clasa a VI-a

VI.36. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Arătaţi că printre valorile naturale ale lui n care fac adevărată propoziţia $n^2 + k \,\vdots\, n + k$, există cel puţin trei pătrate perfecte.

Claudiu Ştefan Popa, Iaşi

VI.37. Numerele 1160, 1604 şi 2270 dau acelaşi rest la împărţirea prin n. Aflaţi împărţitorul n.

Cristian Lazăr, Iaşi

VI.38. Demonstraţi că nu există numere naturale x, y, z direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive, astfel încât $x + y + z$ să fie număr prim.

Alexandru Negrescu, elev, Botoşani

VI.39. Radu şi Mihai joacă de mai multe ori un joc în urma căruia câştigătorul primeşte a puncte, iar cel care pierde primeşte b puncte ($a, b \in \mathbb{N}^*$, $a > b$). Dacă scorul final este $61 - 49$ în favoarea lui Radu, iar Mihai a câştigat 4 partide, aflaţi a şi b.

Adrian Zanoschi, Iaşi

VI.40. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 120°$. Perpendiculara în C pe AC intersectează mediatoarea lui $[AB]$ în D; notăm $\{E\} = CD \cap AB$. Să se arate că $AB = 2AC$ dacă şi numai dacă $m(\widehat{BDE}) = 90°$ şi $BE = 2AB$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

Clasa a VII-a

VII.36. Să se arate că $\sqrt{\dfrac{1}{n}} + \sqrt{\dfrac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\dfrac{2n-1}{n}} < 2n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Cătălin Calistru, Iaşi

VII.37. Arătaţi că în baza de numeraţie 7 printre numerele ce se scriu cu cifrele $0, 1, 2$ există o infinitate care sunt pătrate perfecte şi o infinitate ce nu sunt pătrate perfecte. Aceste afirmaţii rămân valabile dacă se folosesc cifrele $3, 5, 6$?

Ruxandra Ioana Vâlcu, elevă, Iaşi

VII.38. Fie a, b, c cifre nenule, $a \neq c$. Să se arate că dacă $\dfrac{\overline{abb\ldots bc}}{\overline{cbb\ldots ba}} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{ca}}$ (termenii primei fracţii conţinând câte 2003 cifre b), atunci $b = a + c$.

Mihaela Bucătaru, Iaşi

VII.39. Dacă $x < y < z$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, atunci $x^n + y^n \neq z^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Dumitru Neagu, Iaşi

VII.40. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $m(\widehat{A}) = 60°$, iar $M \in Int\ ABC$ astfel încât $m(\widehat{BMC}) = 150°$. Notăm cu P, Q, R proiecţiile lui M pe BC, CA şi respectiv AB. Să se arate că $\triangle PQR$ este dreptunghic.

Constantin Cocea, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.36. Determinaţi cardinalul minim al unei mulţimi B pentru care putem defini funcţii $f : \mathbb{R} \to B$ astfel încât $f(-1) < 0$ şi $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Iulia Zanoschi, elevă, Iaşi

VIII.37. If $a, b, c \in (0, \infty)$ prove the following inequalities:

a) $(a + b + c)^3 - \left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq 24$ where $abc = 1$;

b) $(a + b + c)^3 - \left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ where $ab + bc + ac = 1$.

Zdravko Starc, Vršac, Jugoslavia

VIII.38. Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat. Arătaţi că există o infinitate de numere $x, y, z \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}$.

Lucian Tuţescu, Craiova

VIII.39. Fie $ABCD$ un patrulater strâmb cu $[AD] \equiv [BC]$. Să se construiască dreptele paralele d_1, d_2, d_3, d_4 astfel încât $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in d_3$, $D \in d_4$ şi $dist\,(d_1, d_4) = dist\,(d_2, d_3)$.

Horia Mihail Teodorescu, elev, Iaşi

VIII.40. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub, iar $O \in (BB')$. Dreptele $A'O$ şi $C'O$ intersectează (ABC) în E, respectiv F, iar AO şi CO intersectează $(A'B'C')$ în E', respectiv F'.

a) Arătaţi că $EF \cdot E'F'$ nu depinde de poziţia lui O;

b) Arătaţi că $S_{BB'E'E} \geq S_{ABCD}$ şi determinaţi O pentru care se atinge egalitatea.

Monica Nedelcu, Iaşi

Clasa a IX-a

IX.36. Determinaţi $x < 0 < y$ astfel încât $xy + \dfrac{y}{x} = y^3 - 5y + 2$.

Cezar Lupu, elev, Constanţa

IX.37. Pentru $x \in [1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi inegalitatea

$$\left(x^{n+1} + 1\right)(x^n - 1) \geq 2nx^n(x - 1).$$

Marius Pachiţariu, elev, Iaşi

IX.38. Să se arate că $\dfrac{x^{n+1}}{y^n}+\dfrac{y^{n+1}}{z^n}+\dfrac{z^{n+1}}{x^n}\geq x+y+z$, $\forall x,y,z>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Gigel Buth, Satu Mare

IX.39. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{1}{2\sqrt{[x]^3}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{[x]\cdot[x+1]^3}}=\dfrac{2}{[x]\cdot[x+2]}$.

Daniel Jinga, Piteşti

IX.40. Fie $M\neq G$ în planul $\triangle ABC$ şi D,E,F mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$ şi respectiv $[AB]$. Considerăm punctele X,Y,Z astfel încât $\overrightarrow{XD}=m\overrightarrow{XM}$, $\overrightarrow{YE}=m\overrightarrow{YM}$, $\overrightarrow{ZF}=m\overrightarrow{ZM}$, $m\neq 1$.

a) Dacă $m\neq\dfrac{3}{2}$, atunci AX,BY,CZ sunt concurente în S, cu $\overrightarrow{SG}=\dfrac{2m}{3}\overrightarrow{SM}$.

b) Dacă $m=\dfrac{3}{2}$, atunci AX,BY,CZ sunt paralele cu GM.

Virgil Nicula, Bucureşti

Clasa a X-a

X.36. Să se rezolve inecuaţia $a^{\log_b^2 x}+x^{\log_b x}\leq a+b$, unde $a,b\in(1,\infty)$.

Daniela Dodan, elevă, Iaşi

X.37. Fie $a,b\in(0,1)\cup(1,\infty)$ şi funcţia injectivă $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(a^x)+f(b^x)$ este constantă. Să se arate că $ab=1$ şi că există funcţii f care satisfac ipotezele problemei.

Dan Popescu, Suceava

X.38. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ cu $a>b>c>d$. Să se arate că a,b,c,d sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $(a-b)(b-c)(c-d)=\left(\dfrac{a-d}{3}\right)^3$.

A. V. Mihai, Bucureşti

X.39. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $AB=a$, $AD=b$, $AA'=c$. Dacă $M\in Int\,A'B'C'D'$, notăm cu α,β,γ măsurile unghiurilor pe care AM le face cu AB, AD şi respectiv AA'. Să se arate că

$$AM<a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma<AC'.$$

Cătălin Calistru, Iaşi

X.40. *a*) Pentru $x,y,z\geq 0$, demonstraţi inegalitatea

$$\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x+z}+\sqrt{y+z}\right)\cdot\sqrt{xy+xz+yz}\geq 3\sqrt{6xyz}.$$

b) Cu notaţiile uzuale, în orice triunghi are loc inegalitatea

$$\frac{R}{r}-2\geq\frac{9}{4}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}.$$

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XI-a

XI.36. Fie D,M două matrice nesingulare de ordin n, D diagonală, iar M triunghiulară. Dacă $D={}^tMDM$, să se arate că M este tot o matrice diagonală, având ±1 pe diagonala principală.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XI.37. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A + \alpha^t A) = 0$, unde $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}$. Să se arate că $\det(A + {}^t A) = \dfrac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha} \det A$.

Marian Ionescu, Piteşti şi Lucian Tuţescu, Craiova

XI.38. Să se determine funcţiile continue $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care $f(f(x)) + 2f(x) = 3x$, $\forall x \geq 0$.

Mihail Bencze, Braşov

XI.39. Fie şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât şirul $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)_{n\geq 1}$ este convergent. Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ are proprietatea că $x_n \leq x_{n+1}(1 + x_n y_{n+1})$, $\forall n \geq 1$, arătaţi că şirul $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

XI.40. Fie $x_0 \in [-1, 1]$; arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ecuaţia $3x - 4x^3 = x_n$ are o singură soluţie $x_{n+1} \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Demonstraţi că şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(3^n x_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente şi calculaţi limitele lor.

Marian Tetiva, Bârlad

Clasa a XII-a

XII.36. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru care ecuaţia $x^2 = x + \widehat{1}$ are soluţie unică în $\mathbb{Z}_n$; rezolvaţi ecuaţia în acest caz.

Andrei Nedelcu, Iaşi

XII.37. Fie $(G, +)$ un subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$. Să se determine morfismele crescătoare de la $(G, +)$ la $(\mathbb{R}, +)$.

Dan Ştefan Marinescu şi Viorel Cornea, Hunedoara

XII.38. Determinaţi funcţiile derivabile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f'(x) = g(x) + x$ şi $g'(x) = f(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XII.39. Fie $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{g(n)}}{x+\alpha} dx$, unde $\alpha \in [1, \infty)$.

Adrian Sandovici, Piatra Neamţ

XII.40. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă astfel încât $xf'(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x}$ există şi este finită. Să se arate că

$$f(1) \geq \min\left(2\int_0^1 f(x)\,dx, \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx\right).$$

Marcel Chiriţă, Bucureşti

Probleme pentru pregătirea concursurilor

A. Nivel gimnazial

G36. Fie $x, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât x divide $10^n - 1$, însă x nu divide $10^k - 1$ pentru $k < n$. Să se arate că x divide $10^m - 1$ dacă şi numai dacă $m \,\vdots\, n$.

N. N. Hârţan, Iaşi

G37. $2n$ muzicieni ($n > 2$) participă la un festival. La fiecare concert, o parte dintre ei cântă iar ceilalţi ascultă. Să se determine numărul minim de concerte astfel încât fiecare muzician să-i asculte pe toţi ceilalţi.

Titu Zvonaru, Bucureşti

G38. Mulţimea $A \subset \mathbb{Z}$ are cinci elemente. Adunând în toate modurile posibile câte trei elemente din mulţime, obţinem următoarele 10 sume: 3, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 20. Determinaţi mulţimea A. (În legătură cu o problemă de concurs din Iugoslavia.)

Gabriel Popa, Iaşi

G39. Fie $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, unde $n \geq 2003$, astfel încât

$$\begin{cases} x_1 - (n+1)\,x_2 + nx_3 \geq n-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} - (n+1)\,x_{n-1} + nx_n \geq n-1 \\ x_{n-1} - (n+1)\,x_n + nx_1 \geq n-1-n^2 \\ x_n - (n+1)\,x_1 + nx_2 \geq 2n-1. \end{cases}$$

Dacă $x_1 = 1$, să se calculeze x_{2003}.

Romeo Cernat, Iaşi

G40. Comparaţi numerele reale a şi b, ştiind că $a^2 - 14a + b^2 + 6b + 33 = 0$.

Bogdan Răducanu, elev, Iaşi

G41. Dacă $0 < x \leq y \leq z$, să se arate că

$$3 \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{x}{z} + 1 + \frac{z}{x} \leq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}.$$

Ovidiu Pop, Satu Mare

G42. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $[x] + [x+a] = [bx]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G43. Fie $\widehat{xOy}$ un unghi oarecare şi P un punct în interiorul său. Se consideră punctele $A, B \in [Ox$ cu $A \in (OB)$ şi $C, D \in [Oy$ cu $C \in (OD)$ astfal încât triunghiurile PAB şi PCD să fie echilaterale. Arătaţi că dreptele OP, AD şi BC sunt concurente dacă şi numai dacă P se află pe bisectoarea unghiului dat.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G44. Fie $VABC$ o piramidă, iar G centrul de greutate al $\triangle ABC$. Un plan ce trece prin G taie dreptele VA, VB, VC în A', B' şi respectiv C'. Să se arate că $\dfrac{VA}{VA'} + \dfrac{VB}{VB'} + \dfrac{VC}{VC'} = 3$.

Constantin Cocea, Iaşi

G45. Fie $SABC$ un tetraedru în care $\triangle ABC$ nu este echilateral, iar muchiile $[SA], [SB], [SC]$ nu sunt toate congruente. Demonstraţi că există şase puncte $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pe dreptele SA, SB, SC, BC, AC şi respectiv AB astfel ca patrulaterele $A_1B_1A_2B_2$, $B_1C_1B_2C_2$ şi $A_1C_1A_2C_2$ să fie trapeze izoscele ($A_1B_1 \| A_2B_2$,

$A_1C_1 \| A_2C_2$, $B_1C_1 \| B_2C_2$) dacă şi numai dacă

$$SA^2\left(AB^2 - AC^2\right) + SB^2\left(BC^2 - BA^2\right) + SC^2\left(CA^2 - CB^2\right) = 0.$$

Daly Marciuc, Satu Mare

B. Nivel liceal

L36. Fie $\triangle ABC$ şi $\mathcal{M}$ triunghiul său median. Dacă P este un punct aflat în interiorul sau pe laturile lui $\mathcal{M}$, iar A', B', C' sunt intersecţiile dreptelor AP, BP, CP cu laturile BC, CA şi respectiv AB, atunci $\dfrac{1}{4} < \dfrac{AP \cdot BP \cdot CP}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \dfrac{8}{27}$.

Marian Ionescu, Piteşti

L37. Fie cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}$ astfel încât $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterior în D, iar cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente interior lui $\mathcal{C}$ în B, respectiv C. Tangenta comună interioară cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ taie cercul $\mathcal{C}$ în A şi A_1, dreapta AB taie $\mathcal{C}_1$ în K, iar AC taie $\mathcal{C}_2$ în L. Să se arate că $\dfrac{1}{DA} + \dfrac{1}{DA_1} = \dfrac{2}{KL}$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L38. Fie $\triangle ABC$ şi punctele $D, D' \in BC$ conjugate armonic în raport cu vârfurile B şi C. Cercul circumscris $\triangle ADD'$ intersectează AB în M şi AC în N. Arătaţi că, dacă $MN \perp BC$, atunci $[AD$ şi $[AD'$ sunt bisectoarele unghiului $\widehat{A}$ (interioară şi exterioară) sau $m(\widehat{A}) = 90°$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L39. Determinaţi toate numerele naturale nenule n pentru care $\dfrac{an\,(an+2)}{p\,(p+1)}$ este pătrat perfect, unde $a, p \in \mathbb{N}^*$.

Mihai Haivas, Iaşi

L40. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det\left(A^2B + AB^2\right)$ este impar. Să se arate că $A + \alpha B$ este inversabilă pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Marian Ursărescu, Roman

L41. Demonstraţi că grupul simetric S_{32} nu are elemente de ordin 2002.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

L42. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel finit cu cel puţin 5 elemente şi cu $1 + 1 \in A$ inversabil. Fie $M = \left\{x \in A \mid x^2 = 1\right\}$, $I = \left\{x \in A \mid x^2 = x\right\}$. Să se arate că $\operatorname{card} M = \operatorname{card} I < \operatorname{card} A \,/2$.

Ovidiu Munteanu, Braşov

L43. Determinaţi polinoamele $P \in \mathbb{R}[X]$ pentru care $P(z) \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

L44. Fie $n \geq 2$ număr natural, iar $f_0, f_1, f_2, \ldots$ un şir de polinoame definit prin: $f_0 = (X+1)^n$, $f_{p+1} = X \cdot f_p'$, $\forall p \geq 0$. Definim încă $h_p = f_p - \sigma_1^{p-1} f_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1}^{p-1} f_1$, $\forall p \geq 1$, unde $\sigma_k^n = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} i_1 i_2 \ldots i_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sunt sumele simetrice fundamentale ale numerelor $1, 2, \ldots, n$. Să se arate că

$h_p = n\,(n-1) \ldots (n-p+1)\, X^p\, (X+1)^{n-p}$, $\forall p = 1, 2, \ldots$

Marian Tetiva, Bârlad

L45. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continuă. Dacă funcţia $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ este mărginită, să se arate că $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 x f(nx)\, dx = 0$.

Adrian Zanoschi, Iaşi