Probleme propuse[1]

Clasele primare

P.24. Aflați numerele a, b, c, d ştiind că verifică în acelaşi timp următoarele egalități: $a+3=b$, $b+3=c$, $c+3=d$, $a+3=10$.

(*Clasa I*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.25. Un elev din clasa I, fixând un număr din şirul numerelor naturale, constată că suma numerelor din fața lui nu este mai mică decât 55, iar suma aceasta adunată cu numărul fixat nu depăşeşte pe 66. Despre ce număr este vorba?

(*Clasa I*) **Luminița Popa, elevă, Iaşi**

P.26. Pe trei borcane de compot, unul de cireşe, altul de vişine şi al treilea cu amestec de cireşe şi vişine, toate etichetele au fost puse greşit. Scoțând un singur fruct dintr-un singur borcan, determinați conținutul fiecăruia.

(*Clasa a II-a*) *******

P.27. Să se scrie numărul 31 folosind cele patru operații aritmetice şi numai cifra 3 (se cer cel puțin două soluții).

(*Clasa a II-a*) **Andrea Balla, elevă, Braşov**

P.28. Câte pagini are o carte dacă pentru paginarea ei s-a folosit cifra 9 de 117 ori?

(*Clasa a III-a*) **Crizantema Mironeanu, elevă, Iaşi**

P.29. Ioana şi Alina au cules împreună 165 de nuci. Ioana a cules mai puține nuci decât Alina; ea face un calcul şi observă că triplul diferenței dintre numărul nucilor culese de ele reprezintă tocmai numărul nucilor culese de Alina. Câte nuci a cules fiecare fată?

(*Clasa a III-a*) **Înv. Maria Racu, Iaşi**

P.30. Arătați că dintre oricare patru numere naturale diferite, mai mici decât 1000000, se pot alege două a căror diferență să se împartă exact la 3.

(*Clasa a IV-a*) **Roxana Bolocan, elevă, Iaşi**

P.31. O veveriță descoperă un alun încărcat cu fructe şi îşi face provizii pentru iarnă transportând la scorbura sa alternativ: o dată două alune, o dată trei alune. După ce transportă 47 de alune, face o pauză pentru a se odihni. Să se calculeze ce distanță a parcurs veverița în total, dacă de la alun la scorbura ei este o distanță de x hm x dam x m, unde x are ca valoare cel mai mic număr natural posibil.

(*Clasa a IV-a*) **Înv. Mihai Agrici, Iaşi**

P.32. Un părinte îşi împarte averea astfel: la primul copil 10 milioane plus o cincime din rest, la al doilea copil 20 de milioane plus o cincime din noul rest, la al treilea 30 de milioane plus o cincime din noul rest şi aşa mai departe. Să se afle suma împărțită de părinte, precum şi numărul copiilor, ştiind că toți au moşteniri egale.

(*Clasa a IV-a*) **Mihai Gârtan, Iaşi**

Clasa aV-a

V.26. Să se determine cifrele distincte şi nenule a, b, c, d, e, f, g pentru care rezultatul înmulțirii alăturate este cel mai mare posibil:

$$\begin{array}{r} a\,0\,b\,\cdot \\ \underline{c\,0\,d} \\ e\,*\,f \\ \underline{g\,*\,*\;\;\;\;} \\ g\,*\,*\,*\,f \end{array}$$

Ioan Săcăleanu, Hârlău

V.27. Trei apicultori au tras împreună 700 kg miere de albine. Când au împărțit mierea, primul apicultor a luat jumătate, al doilea jumătate din rest, al treilea jumătate din

[1] Se primesc soluții până la data de 15. 01. 2003.

Probleme pentru pregătirea concursurilor [1]

A. Nivel gimnazial

G6. Dacă un număr natural se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte, atunci orice putere a sa se poate scrie, de asemenea, ca sumă de două pătrate perfecte.

***

G7. Arătați că numărul $\overline{aa...a}$ (2001 cifre) nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi cifra a în baza 10.

***

G8. Determinați $n \in \mathbf{Z}$ pentru care $\dfrac{3n\ (18n+13)-28}{3n+1}$ este fracție reductibilă.

Dumitru- Dominic Bucescu, Iaşi

G9. Se dau trei fişicuri de monede aşezate vertical, asupra cărora putem efectua una dintre operațiile O_1: luăm cele două monede de deasupra unui fişic şi le aşezăm peste altul, sau O_2: luăm cele două monede de deasupra unui fişic şi le aşezăm câte una peste fiecare dintre celelalte două fişicuri.

a) Găsiți o condiție necesară pentru ca, după un număr de operații, toate fişicurile să conțină la fel de multe monede;

b) Arătați că această condiție nu este suficientă dacă este permisă o singură operație, însă este suficientă în cazul în care sunt permise amândouă.

Gabriel Popa, Iaşi

G10. Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, rezolvați ecuația

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}-x_1}+\sqrt{\frac{n+1}{n}-x_2}+...+\sqrt{\frac{n+1}{n}-x_n}+\sqrt{x_1+x_2+...+x_n}=n+1\,.$$

Mihai Totolici, Galați

G11. Rezolvați în $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ ecuația $x^2+y^2=5445$.

Daniela Iosub, elevă, Iaşi

G12. Să se determine $n, m \in \mathbf{N}^*$ pentru care $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+...+\left[\sqrt{n}\right]=n^m$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

G13. Arătați ca numerele 18^n şi 2^n+18^n, $n \in \mathbf{N}$, au acelaşi număr de cifre.

Gheorghe Iurea, Iaşi

G14. Să se arate că nu există nici un triunghi dreptunghic având catetele numere raționale, iar ipotenuza egală cu 2001.

Constantin Cocea, Iaşi

G15. Să se arate că $E(x,y,z) \geq 3$, dacă

$$E(x,y,z)=\sqrt{x^2-2x\sin z-4\cos z+5}+\sqrt{y^2-2y\sin z-6\cos z+10}\,,\qquad x,y,z\in\mathbf{R}.$$

Cristiana Artenie, elevă, Iaşi

G16. Fie M un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC astfel încât $MA^2=MB^2+MC^2-\sqrt{2}\ MB\cdot MC$; calculați măsura unghiului $\widehat{BMC}$. Generalizare.

Corneliu Brădățeanu, Paşcani

G17. Fie $ABCD$ un patrulater convex ce nu are diagonalele perpendiculare, B_1 şi D_1 proiecțiile punctelor B, respectiv D pe AC, iar A_1 şi C_1 proiecțiile punctelor A, respectiv C

[1] Se primesc soluții până la data de 15.01.2003

pe BD. Să se arate că $\dfrac{S_{BB_1DD_1}}{S_{CC_1AA_1}}=\left(\dfrac{BD}{AC}\right)^2$ şi $S^2_{ABCD}\cdot\cos^2(BD,AC)=S_{BB_1DD_1}\cdot S_{CC_1AA_1}$.

Claudiu-Ştefan Popa, Iaşi

G18. Fie ABC un triunghi cu $m(\hat{A})\leq 90°$. Pe latura (BC) se consideră punctele M şi N astfel încât AM şi AN să fie simetrice faţă de bisectoarea unghiului A. Cercul circumscris triunghiului AMN intersectează laturile AB şi AC în E, respectiv F. Dacă $\{I\}=BF\cap CE$ şi $\{P\}=AI\cap BC$, demonstraţi că $AP\geq\dfrac{BC}{2}$.

Florin Nicolaescu, Balş

G19. Fie $A_1A_2A_3$ un triunghi echilateral înscris în cercul $C(O,R)$ şi cercurile C_i $(i=1,2,3)$ de aceeaşi rază r, tangente interior cercului C în vârfurile A_i corespunzătoare. Să se arate că pentru orice $P\in C(O,R)$ are loc relaţia $t_1^2+t_2^2+t_3^2=$constant, unde t_i $(i=1,2,3)$ este lungimea tangentei dusă din P la cercul C_i.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

G20. Să se arate că pentru orice alegere a 12 numere naturale consecutive nu se pot numerota muchiile unui cub astfel ca suma numerelor aflate pe trei muchii care au un vârf comun să fie aceeaşi pentru toate vârfurile cubului (nu se numerotează două muchii cu acelaşi număr). Să se arate că este posibilă numerotarea descrisă dacă se aleg convenabil 12 numere dintre oricare 13 numere naturale consecutive.

Constantin Chirilă, Iaşi

B. Nivel liceal

L6. Fie $x_1, x_2, \cdots x_n$, $n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}$, numere reale cu proprietatea $\dfrac{x_1}{S-x_1}+\dfrac{x_2}{S-x_2}+$ $+\ldots+\dfrac{x_n}{S-x_n}=1$, unde $S=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Arătaţi că $\dfrac{x_1^3}{S-x_1}+\dfrac{x_2^3}{S-x_2}+\ldots..+\dfrac{x_n^3}{S-x_n}\leq-\dfrac{S^2}{n}$.

Răzvan Bărbulescu, elev, Craiova

L7. În triunghiul ABC, $m(\hat{A})\geq 60°$, considerăm medianele CN, BN' şi bisectoarele $BE,\ CE'$. Notăm $\{P\}=CN\cap BE, \{Q\}=CE'\cap BN'$. Arătaţi că punctele P şi Q nu pot fi ambele pe înălţimea din A.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

L8. Fie triunghiul ABC şi $M\in \operatorname{Int} ABC$, $MA\cap C(MBC)=\{M,A_1\}$, $MB\cap C(MCA)=$ $=\{M,B_1\}$, $MC\cap C(MAB)=\{M,C_1\}$. Să se arate că $\dfrac{MA_1}{MA}+\dfrac{MB_1}{MB}+\dfrac{MC_1}{MC}\geq 6$.

Neculai Roman, Mirceşti (Iaşi)

L9. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu $a\leq b\leq c$ şi $u,v,w\in(0,\infty)$, $u\leq v\leq w$. Dacă $uGA+vGB+wGC=(u+v+w)R$, unde G este centrul de greutate al triunghiului, iar R este raza cercului circumscris, atunci triunghiul ABC este echilateral. Generalizare

Paul Georgescu şi Gabriel Popa, Iaşi

L10. a) Fie $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geq 2$. Să se arate că există o progresie aritmetică de numere naturale care nu are nici un termen de forma x^n, $x\in\mathbf{N}$.

b) Dacă o progresie aritmetică de numere naturale conține un termen de forma x^n, $x \in \mathbf{N}$, atunci să se arate că progresia conține o infinitate de termeni de această formă.

Adrian Zanoschi, Iaşi

L11. Să se rezolve în $\mathbf{N}^*$ ecuația $2 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^y + 174$.

Daniela Iosub, elevă, Iaşi

L12. Fie $ABCD$ un patrulater convex; notăm $\{O\}=AC \cap BD$, M mijlocul lui (AB), N mijlocul lui (CD). Pentru propozițiile $P_1 : ABCD$ inscriptibil; $P_2 : OM \perp CD$; $P_3 : ON \perp AB$, să se arate că: a) $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow P_3$; b) $P_2 \wedge P_3 \Rightarrow P_1$; c) $P_3 \wedge P_1 \Rightarrow P_2$ (în legătură cu problema *C:2265* din G.M. 3/2000).

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

L13. Fie $P \in \mathbf{R}[X]$, $P(X) = a_1 X^n + a_2 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$, $n \geq 2$ cu $a_1 > 0$ şi cu toate rădăcinile pozitive şi subunitare. Să se arate că $(n-1)a_1 + a_2 + (-1)^{n-1} a_n > 0$.

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

L14. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ considerăm polinomul $P_n(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & X^2+2 & 2 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n & n & \ldots & X^n+n \end{vmatrix}$.

a) Arătați că zero este rădăcină multiplă de ordin $\frac{n(n-1)}{2}$ a acestui polinom;

b) Dacă n este par, P_n nu are rădăcini reale nenule, iar dacă n este impar, P_n are o singură rădăcină reală nenulă, care este simplă şi situată în intervalul $(-2,-1]$.

Temistocle Bîrsan, Iaşi

L15. Fie $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ un şir convergent de numere reale. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = \{n\alpha + c_n\}$ nu este monoton.

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

L16. a) Fie $a < b$ şi $M = \{f : [a,b] \to [a,b];\ \ f \text{ monotonă}\}$. Arătați că există $f \in M$ cu $f(x) \neq x$, $\forall x \in [a,b]$ şi că orice asemenea funcție nu are proprietatea lui Darboux.

b)Demonstrați că $\forall f \in M$, $\exists c \in [a,b]$ astfel încât $f(c)[a+b-f(c)] = c(a+b-c)$.

Ştefan Alexe, Piteşti

L17. Fie A un număr real pozitiv şi $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcție derivabilă pentru care $f(0) = 0$ şi $|f'(x)| \leq A f^n(x)$, $\forall x \in [0,\infty)$, unde n este un număr natural dat, $n \geq 1$, iar $f^n = f \circ f \ldots \circ f$. Atunci f este identic nulă.

Sorin Puşpană, Craiova

L18. Fie $A \in M_n(\mathbf{Z})$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $I_n + sA$ este inversabilă şi $(I_n + sA)^{-1} \in M_n(\mathbf{Z})$ pentru orice $s \in \{1,2,\ldots 2n\}$.

a) Să se arate că $I_n + kA$ este inversabilă pentru orice $k \in \mathbf{Z}$ şi $(I_n + kA)^{-1} \in M_n(\mathbf{Z})$;

b) Dacă $A^2 = 0_n$, să se arate că $G = \{I_n + kA; k \in Z\}$ este grup în raport cu înmulţirea matricelor şi să se determine toate subgrupurile lui G.

Marian Ionescu, Piteşti

L19. Fie H un subgrup al grupului altern $(A_{2002}, \circ)$. Dacă

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 1999 & 2000 & 2001 & 2002 \\ 1 & 2 & \dots & 1999 & 2001 & 2002 & 2000 \end{pmatrix} \in H$$

şi $\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} \in H$, $\forall \sigma \in A_{2002}$, să se arate că $H = A_{2002}$.

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi

L20. Fie $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$. Se consideră funcţia $f : [1, a] \to \mathbf{R}$ de două ori derivabilă. Să se arate că dacă funcţia $g : [1, a] \to \mathbf{R}$, $g(x) = xf'(x)$ este monoton crescătoare ,atunci.

$$f(\sqrt{a}) \ln a \le \int_1^a \frac{f(t)}{t} dt .$$

Marcel Chiriţă, Bucureşti

LISTA MEMBRILOR FILIALEI IAŞI a S.S.M.[*]

- continuare din nr. 1/2000 şi nr. 1/2001 -

68. ANDONE Elena	- Şcoala “Vasile Conta” Iaşi
69. GRIGORAŞ Julieta	- Liceul Teoretic “Vasile Alecsandri” Iaşi
70. TIMOHE Gheorghe	- Liceul Teoretic “Emil Racoviţă” Iaşi
71. TRANDAFIR Ilie	- Liceul Teoretic “Emil Racoviţă” Iaşi
72. BÎRSAN Paraschiva	- Liceul Teoretic “Garabet Ibrăileanu” Iaşi
73. BÎRSAN Temistocle	- Universitatea Tehnică “Gh. Asachi” Iaşi
74. BÎRSAN Mircea	- Universitatea “Al. I. Cuza” Iaşi
75. CARAPANU Dorina	- Liceul Teoretic “Garabet Ibrăileanu” Iaşi
76. MIRON Nicu	- Liceul Teoretic “Emil Racoviţă” Iaşi
77. DUCA Alina Nicoleta	- Liceul de Arte “Octav Băncilă” Iaşi
78. CADIŞ Mihaela Narcisa	- Grupul Şcolar Energetic Iaşi
79. PALAGHIU Maria	- Grupul Şcolar Energetic Iaşi
80. PLĂEŞU Veronica	- Şcoala “Titu Maiorescu” Iaşi
81. COVALCIUC Margareta	- Şcoala “Titu Maiorescu” Iaşi
82. COVALCIUC Dumitru	
83. MIHALACHE Vasile	- Şcoala “Titu Maiorescu” Iaşi
84. SIMIRAD Constantin	- Colegiul Naţional “C. Negruzzi” Iaşi
85. SIMIRAD Cristina	- Şcoala nr. 10 Iaşi
86. PAVLIUC Cristina	- Liceul Teoretic “Al. I. Cuza” Iaşi
87. HAIVAS Mihai	- Institutul de cercetări Iaşi
88. SUSANU Gelu	- Liceul Teoretic “Gr. Moisil” Iaşi
89. GEORGESCU Iulia	- Liceul Teoretic “Gr. Moisil” Iaşi

[*]Lista va fi continuată în numerele următoare.

noul rest, apoi operațiunea se repetă până se împarte toată mierea. Să se afle câtă miere a luat fiecare.

Cătălin-Cristian Budeanu, Iaşi

V.28. Arătați că $N_1 = 3^{2001} + 2^{2001}$ şi $N_2 = 3^{2002} - 2^{2002}$ sunt numere divizibile cu 5.

Dorina Carapanu, Iaşi

V.29. Să se afle numerele $\overline{abc}$ pentru care $\overline{abc} = \overline{ac} \cdot b^2$.

Romanța Ghiță şi Ioan Ghiță, Blaj

V.30. Dacă x_i, $i=\overline{1,500}$, sunt numere naturale nedivizibile cu 5, atunci numărul $N = 4x_1^4 + 8x_2^8 + 12x_3^{12} + ... + 2000x_{500}^{2000}$ este divizibil cu 5.

Tamara Culac, Iaşi

Clasa aVI-a

VI.26. Fie $A = 4a + 6b - c,\ B = 4a - 3b - c, C = -3a - 11b - 28c$, unde $a,b,c \in \mathbf{Z}$. Dacă (A, B)=23, arătați că (A, B, C)=23.

Cristiana Constanda, elevă, Iaşi

VI.27. Să se rezolve în **Z** sistemul

$$|3x + 2y| \le 8; \quad |x - y| \le 1; \quad |3x - 1| = 1..$$

Mihai Crăciun, Paşcani

VI.28. Să se rezolve în **N** ecuația

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + n\ (n+1) - (n+1) - (n+2) - ... - 2n = 2 + 4 + ... + 2n.$$

Dumitru - Dominic Bucescu, Iaşi

VI.29. În triunghiul ascuțitunghic *ABC*, bisectoarea interioară a unghiului $\hat{B}$ intersectează înălțimea din *A* în *E*. Fie $F \in (DC$ astfel încât *AE=EF*. Arătați că $BE \perp AF$.

Tamara Culac, Iaşi

VI.30. Pe ipotenuza *(BC)* a triunghiului dreptunghic *ABC* se consideră punctele *N* şi *M* astfel încât *BN=AB, CM=AC.* Dacă *P* şi *Q* sunt proiecțiile punctelor *M* şi *N* pe dreptele *AN*, respectiv *AM*, demonstrați că segmentele *(MP), (NQ)* şi *(PQ)* se pot constitui în laturile unui triunghi.

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.26. Determinați $a \in \mathbf{Q}$ ştiind că $\sqrt{a + \sqrt{2}} - \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VII.27. Determinați $a \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul

$$x_1^2 + (a+1)x_1 + \frac{a^2}{4} = x_2, \quad ... \quad ,x_{n-1}^2 + (a+1)x_{n-1} + \frac{a^2}{4} = x_n, \ \ x_n^2 + (a+1)x_n + \frac{a^2}{4} = x_1$$

să admită numai soluții întregi.

Cătălin Calistru, Iaşi

VII.28. Fie zece numere naturale nenule care au suma egală cu 55. Să se arate că printre ele există trei care pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Adrian Zanoschi, Iaşi

VII.29. Fie *ABCD* un pătrat, *O* centrul său, iar *M* şi *P* mijloacele segmentelor *(OA)*, respectiv *(CD)*. Să se arate că triunghiul *BMP* este dreptunghic isoscel.258

Constantin Cocea și Dumitru Neagu, Iaşi

VII.30. Fie *ABCD* un pătrat de latură 1 şi punctele $M\in(AD)$, $N\in(BC)$, $\{P\}=BM\cap AN$. Dacă $S_{DCNPM}=\frac{1}{2}$, demonstrați că $1<AM+BN\le\frac{4}{3}$ şi $AM\cdot BN\le\frac{4}{9}$.

Emil Vasile, Ploieşti

Clasa aVIII-a

VIII.26. Demonstrați că ecuația $(t^2+1)x^2+4t^2x+4t^2-t=0$ are numai două soluții în $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

Mihai Crăciun, Paşcani

VIII.27. Determinați $x,y\in\mathbf{Z}$ pentru care fracția $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ este echivalentă cu $\frac{5}{19}$ (în legătură cu *E: 9314** din G.M. 11-12/1987).

Gabriel Popa, Iaşi

VIII.28. Fie *a,b* numere naturale de parități diferite. Aflați valorile lui *n* pentru care $S_n=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}+b^n$ este divizibil cu $a+b$.

Mihaela Predescu, Piteşti

VIII.29. Se consideră piramida triunghiulară regulată *VABC* cu latura bazei *a*, iar muchia laterală $2a$. Fie *M* mijlocul lui *(VA)*, iar *N* un punct pe *(VB)* astfel încât $VN=\frac{3a}{4}$. Aflați distanța de la *V* la planul *(MNC)*.

Adrian Corduneanu, Iaşi

VIII.30. Fie *A, B, C, D* patru puncte necoplanare astfel încât $AB=4\sqrt{73}$, $CD=4\sqrt{29}$. Notăm cu *E, F* mijloacele segmentelor (*AB*), respectiv (*CD*). Să se arate că mijloacele segmentelor (*AF*), (*BF*), (*CE*), (*DE*) sunt vârfurile unui paralelogram şi să se calculeze aria acestuia ştiind că are o latură de lungime $\sqrt{194}$.

Romanța Ghiță și Ioan Ghiță, Blaj

Clasa a IX-a

IX.26. Dacă $a\in(0,\infty)$, să se rezolve ecuația $[x]+\frac{a}{[x]}=\{x\}+\frac{a}{\{x\}}$. Discuție.

D. M. Bătinețu-Giurgiu, Bucureşti

IX.27. Să se determine funcțiile $f,\ g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, unde g este surjectivă și aditivă și $g(y)+g(f(x))=f(x+g(y)),\ \forall\ x,y\in[0,\infty)$.

Ioan Săcăleanu, Hârlău

IX.28. Să se determine funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ pentru care $(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\text{ ori}})(x)=x+\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$ fixat, iar funcția $g=f-1_{\mathbf{R}}$ este monotonă.

Mihail Bencze, Braşov

IX.29. Să se arate că în orice triunghi *ABC* are loc inegalitatea

$$\frac{l_a^3}{h_a}+\frac{l_b^3}{h_b}+\frac{l_c^3}{h_c}\le\frac{3R}{2r}\sqrt{p(p^3-3abc)}\,.$$

Viorel Cornea şi Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

IX.30. În patrulaterul *ABCD* considerăm punctele *R* şi *S* pe diagonala *BD*, în interioarele triunghiurilor *ABC*, respectiv *ACD*. Notăm $\{M\}=CR\cap AB$, $\{N\}=AR\cap BC$, $\{P\}=AS\cap CD$ şi $\{Q\}=CS\cap AD$. Ştiind că $\frac{AM^2}{MB^2}+\frac{BM^2}{MC^2}+\frac{CP^2}{PD^2}+\frac{DQ^2}{QA^2}=4$, să se arate că $\frac{AM^n}{MB^n}+\frac{BM^n}{MC^n}+\frac{CP^n}{PD^n}+\frac{DQ^n}{QA^n}=4$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Cătălin Calistru, Iaşi

Clasa a X-a

X.26. Fie ecuaţia $x^4-S_1x^3+Sx^2+mx-m-1=0$, unde S este aria unui triunghi neechilateral ABC, iar S_1 este aria triunghiului $A_1B_1C_1$ determinat de punctele de intersecţie ale bisectoarelor interioare cu cercul circumscris triunghiului ABC. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ ştiind că ecuaţia admite un număr impar de rădăcini în $(0,1)$.

Dumitru Gherman, Paşcani

X.27. Fie $r\in[1,\infty)$, $D=\{z\in\mathbf{C};|z|\le r\}$ şi $P\in\mathbf{C}[X]$, $P(X)=aX^2+bX+c$. Să se arate că dacă $P(z)\in D$, $\forall z\in D$, atunci $a,b,c\in D$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti

X.28. Rezolvaţi ecuaţia $z^2(2^{|z|^2}-1)+z(2^{|z-1|}-1)+1=0$, $z\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$.

Emil Vasile, Ploieşti

X.29. Un motan scoate cu ajutorul unui pahar un număr de peştişori dintr-un acvariu. Câţi peştişori trebuie să conţină acvariul astfel încât motanul să aibă matematic speranţa că va scoate 5 dintre ei?

Gabriel Popa, Iaşi

X.30. Fie $M=\{1,2,...,n\}$. Să se afle numărul de k-uple $(A_1,A_2,...,A_k)$ de submulţimi ale lui *M* astfel încât $\bigcup_{i=1}^{k}A_i=M$ şi $\mathrm{Card}(\bigcap_{i=1}^{k}A_i)=l$, $l\le n$ fixat.

Lucian-Georges Lăduncă, Iaşi

Clasa a XI-a

XI.26. Fie $A\in M_n(\mathbf{R})$. Dacă $\mathrm{Tr}\,({}^tA\cdot A+({}^tA)^*\cdot A^*)=2n\det A$, atunci ${}^tA=A^*$.

Iuliana Georgescu şi Paul Georgescu, Iaşi

XI.27. Fie $a\in[0,1)$ şi $(x_n)_{n\ge0}$ un şir de numere reale astfel încât

$$x_n^2\le a\cdot\max\left\{x_{n-1}^2,\frac{1}{2}\left(x_n^2+x_{n-1}^2\right)\right\},\ \forall n\in\mathbf{N}^*.$$

Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\ge0}$ este convergent şi determinaţi limita sa.

Aurel Muntean, Sibiu

XI.28. Să se determine $p \in \mathbf{R}$ pentru care limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin termenul general $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^p}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}$ este finită şi nenulă.

Constantin Chirilă, Iaşi

XI.29. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln \ln n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+.....+\frac{1}{n}}-1\right)=1$.

Marian Tetiva, Bârlad

XI.30. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie discontinuă şi care are proprietatea lui Darboux. Dacă există o funcţie $g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât $f(x+y)=g(f(x),y)$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$, atunci funcţia f nu are limită la ∞.

Ştefan Alexe, Piteşti

Clasa a XII-a

XII.26. Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1-a^2 & a^2 & -a\sqrt{2} \\ -a^2 & 1+a^2 & -a\sqrt{2} \\ a\sqrt{2} & -a\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}; a \in A \right\}$, unde $A = \mathbf{Z}$ sau $A = \mathbf{Q}$ sau $A = \mathbf{R}$. Arătaţi că $(M,\cdot)$ este grup; este acesta izomorf cu $(A_+^*,\cdot)$?

Gheorghe Costovici, Iaşi

XII.27. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu $Z(G)\neq\{e\}$ şi H un subgrup netrivial al lui G. Să se demonstreze că există $x, y \in G \setminus H$, $x \neq y^{-1}$, astfel încât $xy \in H$ şi $yx \in H$. Daţi exemplu de grup care nu are această proprietate.

Ovidiu Munteanu, student, Braşov

XII.28. Calculaţi $\int \sqrt[n]{tgx}\,dx, x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, pentru $n \in \{2,3,4\}$.

Daniel Jinga, Piteşti

XII.29. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie continuă şi $t>0$. Pentru $a, b > 0$, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^t-(k-1)^t}{n^t} f\left(n^{-t}\left(k^a(k-1)^b\right)^{\frac{t}{a+b}}\right).$$

Mihail Bencze, Braşov

XII.30. Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2}\frac{\ln(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}dx \in \left[\frac{\pi}{8}\ln 2, \frac{e\pi}{16}\right]$.

Cristian Moanţă, Craiova