PROBLEME PROPUSE

Clasa a V-a

V.6. Să se determine mulţimile A şi B care satisfac relaţiile:
1° $A \cup B \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, **2°** $A \cap B = \{1,2\}$, **3°** $A \setminus \{1,2,7,6\} = \{3,4,5\}$ şi
4° $B \setminus \{1,2,4,8\} = \{6,7\}$.

Eugenia Cohal, Iaşi

V. 7. În ce condiţii pentru numerele naturale m şi n diferenţa $9^{2n} - 49^{m}$ este divizibilă cu 10 ?

Cristiana Artenie, cl. a VII-a, Lic. "C. Negruzzi", Iaşi

V. 8. Să se determine numerele $\overline{ab}$ cu proprietăţile:

$$\overline{ab}^2 = \overline{cde} \quad \text{şi} \quad \overline{ba}^2 = \overline{edc}.$$

Constantin Cocea, Iaşi

V. 9. Se notează cu $n!$ (şi se citeşte "*n factorial*") produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Să se arate că au loc inegalităţile:
a) $n! \geq 2^{n-1}$, dacă $n \geq 2$; **b)** $n! \geq 6! \cdot 7^{n-6}$, dacă $n \geq 7$.

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

V. 10. Se consideră şirul de numere naturale $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$.
a) Să se găsească numărul care este scris pe locul 2000.
b) Să se arate că media aritmetică a primelor 1999 numere din acest şir este un număr al şirului.

Petru Răducanu, Iaşi

Clasa a VI-a

VI. 6. Determinaţi a şi b astfel încât numărul $N = 3 \cdot \overline{1a2b0}$ să fie pătrat perfect.

Marius Durea, Iaşi

VI. 7. Să se determine numerele naturale care admit exact patru divizori naturali ştiind că produsul divizorilor săi este egal cu 5929.

Cristiana Artenie, cl. a VII-a, Lic. "C. Negruzzi", Iaşi

VI. 8. Să se determine cel mai mic număr natural n de forma $n = p^{a} \cdot q^{b} \cdot r^{c}$, unde p, q, r sunt numere prime distincte iar a, b, c sunt numere naturale nenule, ştiind că numărul divizorilor naturali ai lui n este 2145. Există un cel mai mare număr natural cu proprietatea de mai sus ?

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

VI. 9. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza BC, B' mijlocul laturii AC şi C' mijlocul laturii AB. Pe dreptele BB' şi CC' se iau punctele P, respectiv Q astfel încât $B' \in (BP)$, $C' \in (CQ)$ şi $[B'P] \equiv [C'Q]$. Dacă $\{G\} = BP \cap CQ$ şi $\{S\} = BQ \cap CP$, să se arate că :

a) triunghiurile QAP şi QSP sunt isoscele ;

b) $AS \perp BC$, $AG \perp BC$ şi că punctele A, G, S sunt coliniare.

În ce caz punctele Q, A şi P sunt coliniare ?

Mihai Gârtan, Iaşi

VI. 10. Fie $\sphericalangle AOB$ cu $m(\widehat{AOB}) = 120^o$. Pe bisectoarea interioară a acestui unghi se consideră punctul C astfel încât $OC = OA + OB$. Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral.

Petru Răducanu, Iaşi

Clasa aVII-a

VII. 6. O persoană depune o sumă de bani într-un cont la o bancă. După un număr întreg de ani constată următoarele: 1^o suma din cont din anul trecut reprezintă 80% din suma din acest an; 2^o dobânda totală acumulată în toţi aceşti ani este mai mare ca suma depusă iniţial, dar este mai mică decât o dată şi jumătate din ea; 3^o dobânda primită în ultimul an este de 6250 lei.

Aflaţi suma depusă, dobânda şi numărul de ani.

Cristiana Constanda, cl. a VII-a, Lic. "C. Negruzzi", Iaşi

VII. 7. Rezolvaţi ecuaţia $a^2b + b^2a + a + b + 1 = 0$ în $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Marius Durea, Iaşi

VII. 8. Fie ABC un triunghi echilateral iar P, Q, R pe laturile (BC), (CA) şi respectiv (AB) astfel încât $PB = QC = RA$. Să se arate că perpendiculara din Q pe AB, perpendiculara din R pe AC şi perpendiculara în P pe BC sunt concurente.

Constantin Cocea, Iaşi

VII. 9. Un triunghi este dreptunghic sau isoscel dacă şi numai dacă dreapta lui Euler asociată acestuia trece prin mijlocul uneia dintre laturi. (*Dreapta lui Euler* este dreapta care trece prin punctele O şi H.)

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

VII. 10. Considerăm patrulaterul convex $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $\{O\} = AC \cap BD$ şi fie M un punct oarecare pe (AB). MO intersectează (CD) în P, paralela prin M la AC intersectează BC în N, iar paralela prin P la AC intersectează AD în Q.

a) Arătaţi că $MNPQ$ este paralelogram.

b) Arătaţi că $MNPQ$ este romb dacă şi numai dacă
$$\frac{MA}{MB}=\frac{AC}{BD}.$$
c) Găsiţi o condiţie necesară şi suficientă ca punctele N, O şi Q să fie coliniare.

Petru Răducanu, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII. 6. Să se arate că $\forall\ a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$, avem
$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+a+b+c)^2 \geq 4(a^3+b^3+c^3-3ab\,c).$$

Lucian Tuţescu, Craiova

VIII. 7. Determinaţi numerele reale $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ ştiind că
$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2-2\left(a_1\sqrt{2}+a_2\sqrt{3}+\ldots+a_n\sqrt{n+1}\,\right)+\frac{n\,(n+3)}{2}=0$$
unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Dumitru Neagu, Iaşi

VIII. 8. Arătaţi că există o infinitate de numere $a,\ b,\ c \in \mathbf{N}$ astfel încât
$$1999+a^2=b^2+c^2.$$

Gheorghe Iurea, Iaşi

VIII. 9. Fie ΔABC şi punctele $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ şi $F \in (AB)$. Notăm cu $S_0 = S_{\Delta DEF}$, $S_1 = S_{\Delta AFE}$, $S_2 = S_{\Delta BDF}$, $S_3 = S_{\Delta DCE}$. Să se arate că
$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3} \geq \frac{3}{S_0},$$
egalitatea realizându-se în cazul în care D, E, F sunt mijloacele laturilor (BC), (CA), (AB).

Constantin Chirilă, Iaşi

VIII. 10. Prisma triunghiulară oblică $ABCA'B'C'$ are ca bază triunghiul echilateral ABC, de latură a. Muchia AA' are lungimea $2a$ şi face cu laturile bazei AB şi AC unghiuri egale de 45^o. Să se afle volumul prismei şi unghiul pe care îl face AA' cu planul bazei.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Clasa a IX-a

IX. 6. Să se arate că dacă $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ şi $\mathbf{P} = \{2n; n \in \mathbf{N}\}$, funcţiile $f, g : \mathbf{N} \to \mathbf{P}$ definite prin

$$f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{şi} \quad g(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

sunt ambele injecţii şi nici una surjecţie.

Gheorghe Costovici, Iaşi.

IX. 7. Să se afle valoarea maximă şi valoarea minimă a expresiei

$$E(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x + 6y - 2$$

ştiind că $0 \leq x \leq 1$ şi $-1 \leq y \leq 1$.

Adrian Corduneanu, Iaşi.

IX. 8. Considerăm mulţimile

$$A = \left\{x \in \mathbf{Q};\ x = \frac{m+n+2}{m+1},\ m, n \in \mathbf{N},\ n \leq m\right\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{Q};\ 1 < x \leq 2\}$$

Să se arate că $A = B$.

Gheorghe Iurea, Iaşi.

IX. 9. Fie ABC un triunghi echilateral şi P un punct în planul său. Să se demonstreze că inversele razelor cercurilor circumscrise triunghiurilor PBC, PCA şi PAB pot fi laturile unui triunghi.

Mircea Bîrsan, Iaşi.

IX. 10. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se arate că:

1) $ABCD$ este un paralelogram dacă şi numai dacă

$$\frac{m(\widehat{CAD})}{m(\widehat{CAB})} = \frac{m(\widehat{ACB})}{m(\widehat{ACD})} \quad \text{şi} \quad \frac{m(\widehat{BDC})}{m(\widehat{BDA})} = \frac{m(\widehat{DBA})}{m(\widehat{DBC})}$$

2) $ABCD$ este romb dacă şi numai dacă cele patru rapoarte de la punctul precedent sunt egale.

Constantin Chirilă, Iaşi.

Clasa a X-a

X. 6. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ nenule, distincte şi astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_1 + z_2 + z_3|$. Fie A_i punctul din planul complex ce are afixul z_i $(i = 1, 2, 3)$.

a) Să se arate că triunghiul $A_1A_2A_3$ este dreptunghic.

b) Să se calculeze $\min\limits_{\alpha \in \mathbf{R}} |\alpha z_1 - z_2 + (1-\alpha)z_3|$.

Ştefan Iancu, cl. a XII-a, Lic. "C. Negruzzi", Iaşi

X. 7. Să se rezolve ecuaţia

$$a^{2x} + a^{3x} + \ldots + a^{nx} + \frac{(n-1)n}{2} = a^x \frac{(n+2)(n-1)}{2} \quad (x \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{R}_+^*,\ n \in \mathbf{N},\ n \geq 2).$$

Dumitru Neagu, Iaşi

X. 8. Fie $P \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de forma

$$P(X) = X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n$$

care are toate rădăcinile reale şi conţinute în intervalul $[\alpha, \beta]$ $(0 < \alpha < \beta)$. Să se demonstreze inegalitatea

$$(1+\alpha)^n \leq (-1)^n P(-1) \leq (1+\beta)^n.$$

Cristian Frăsinaru, Iaşi

X. 9. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic de laturi a, b, c şi arie S. Să notăm cu H_a, I_a, M_a piciorul înălţimii coborâte din vârful A, intersecţia bisectoarei unghiului B cu latura AC şi, respectiv, mijlocul laturii AB şi cu S_a aria triunghiului $H_aI_aM_a$. Analog se definesc punctele H_b, I_b, M_b; H_c, I_c, M_c şi numerele S_b şi S_c. Să se arate că:

1^o ΔABC este echilateral dacă şi numai dacă măcar unul dintre triunghiurile $H_aI_aM_a$, $H_bI_bM_b$ şi $H_cI_cM_c$ este echilateral;

$2^o \Delta ABC$ este isoscel cu $b = c$ sau $c = a$ dacă şi numai dacă $S = 4S_a$;

$3^o \Delta ABC$ este echilateral dacă şi numai dacă $S = 4S_a = 4S_b = 4S_c$.

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

X. 10. O prismă oblică $ABCDA'B'C'D'$ are ca bază pătratul $ABCD$, de latură a, muchiile laterale fiind şi ele egale cu a. Muchia AA' face unghiuri de 45^o cu latura AB şi de 60^o cu latura AD. Notăm cu H piciorul înălţimii duse din A' pe baza $ABCD$. Să se afle:

1^o unghiul pe care îl face AA' cu planul bazei şi înălţimea $A'H$ a prismei;

2^o unghiul pe care îl face AH cu laturile AB şi AD ale bazei.

Adrian Corduneanu, Iaşi

Clasa a XI-a

XI. 6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale nenule astfel încât $\sin(a_n + b_n) = 2a_n + 3b_n, \forall n \geq 1$.

Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -2$.

Cristinel Mortici, Constanţa

XI. 7. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Să se arate că

$$(A+B)A^*(A-B) = (A-B)A^*(A+B),$$

unde A^* este adjuncta lui A.

Constantin Cocea, Iaşi

XI. 8. Demonstraţi că $arctg\frac{\pi}{2} > 1$.

Gabriel Mîrşanu, Iaşi

XI. 9. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_1 \in (0,1),\ x_{n+1} = x_n - nx_n^2,\ n \geq 1.$$

a) Arătaţi că $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător la zero.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

c) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} (1+nx_n)^n = e^2$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XI. 10. Într-un plan se dau două puncte A şi B şi o dreaptă d. Să se afle locul geometric al punctelor P ce au suma pătratelor distanţelor la punctele A şi B proporţională cu distanţa lor la dreapta d. Discuţie.

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

Clasa a XII-a

XII. 6. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă şi $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o primitivă a sa ce verifică condiţia $F(x) \geq F(x + \sin x)$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Arătaţi că ecuaţia $f'(x) = 0$ are o infinitate de soluţii.

b) Daţi un exemplu de funcţie f ce verifică condiţiile din enunţ.

Constantin Micu, Melineşti (Dolj)

XII. 7. Arătaţi că există o singură funcţie derivabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f'(x^3+x) = x$, $x \in R$, şi $f(0) = 0$. Calculaţi $\int_0^2 f(x)dx$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XII. 8. Fie funcţia $f : [1, e] \to \mathbb{R}$ continuă şi cu proprietatea că $\int_1^e f(x)dx = 1$. Să se arate că există $c \in (1, e)$ astfel încât $\frac{1}{c} - 1 < f(c) < c$.

Mihai Haivas, Iaşi

XII. 9. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă oarecare. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{f(x^n)}{1+x} dx = f(0)\ln 2.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

XII. 10. Fie $(G, \star)$ un grup cu n elemente şi $m \in \mathbb{N}^*$, $(m,n) = 1$. Să se arate că, pentru orice $a \in G$, ecuaţia $x^m = a$ are soluţie unică.

Alin Spumă, Iaşi

Notă : În enunţurile problemelor propuse **VI.1** şi **XII.4** din numărul precedent au apărut unele greşeli regretabile de tipar. Publicăm mai jos enunţurile corectate ale acestor probleme.

VI.1 Să se arate că

$$A = \frac{\frac{2}{3}(-1)^m + \frac{3}{2}(-1)^{m-n}}{\frac{1}{2}(-1)^n - \frac{2}{3}(-1)^{mn}} - \frac{1}{7}\left[(-1)^n - (-1)^{mn}\right],$$

unde $m, n \in \mathbb{N}$ şi $m > n$, este un număr întreg.

Gheorghe Iurea, Iaşi

XII.4 Fie $(G, \cdot)$ un grup. Dacă există $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \neq n$, şi $a \in G$ astfel încât $a^{2^{2^m}} = a^{2^{2^n}} = a^{-1}$, atunci $a = e$.

Constantin Cocea, Iaşi