PROBLEME PROPUSE

Clasa a V- a

V.1. Un vehicul parcurge distanța de 150 km dintre localitățile A și B. La jumătatea drumului își mărește viteza cu $\frac{1}{6}$ din viteza inițială. După 3 ore de mers cu viteza sporită, ajunge în localitatea B. Să se afle viteza inițială a vehiculului (Pe cele două porțiuni ale traseului mișcarea este uniformă).

Alexandru Enăchioaie, cl. a VII-a, Lic. "Garabet Ibrăileanu", Iași

V.2. Fie cinci numere naturale consecutive ce satisfac una dintre condițiile:

a) suma lor este cu 10 mai mare ca produsul dintre ele;

b) suma lor este cu 10 mai mare decât produsul dintre cel mai mic și cel mai mare dintre aceste numere.

Aflați în ambele cazuri cele cinci numere.

Anda Vrânceanu, cl. a VII-a, Lic. "Garabet Ibrăileanu", Iași

V.3. Determinați submulțimile A și B ale lui N astfel încât:
1° $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$, 2° $|A| = 3$, 3° elementele lui A sunt numere prime și
4° suma elementelor lui B este egală cu 14.

Marius Durea, Iași

V.4. Dacă numerele $\overline{EMIR}$, $\overline{RIME}$, $\overline{MERI}$ sunt divizibile cu 11 (sau 101), atunci și răsturnatele lor sunt divizibile cu 11 (respectiv 101).

Cătălin Calistru, Iași

V.5. Se dau numerele

$$E = 1 + 13 + 13^2 + ... + 13^n \text{ și } F = 1 + 17 + ... + 17^n,$$

pentru orice n de forma $n = 4k - 1$ cu $k \in N^*$. Arătați că produsul $E \cdot F$ se divide cu numărul 12423600.

Leon Pițu, Iași

Clasa a VI-a

VI.1. Să se arate că

$$A = \frac{\frac{2}{3}(-1)^{m} + \frac{3}{2}(-1)^{m-n}}{\frac{1}{2}(-1)^{n} - \frac{2}{3}(-1)^{mn}} - \frac{1}{7}[(-1)^{n} - (-1)^{mn}]$$

unde m,n $\in$ **N** şi m > n, este un număr ~~natural.~~ întreg

Gheorghe Iurea, Iaşi

VI.2. Determinaţi numerele raţionale x, y, z ştiind că ele satisfac condiţiile:

$$|3x - 5y| + 6(5y + 7z)^2 + \frac{3}{5}|7z + 3x| = 0 \text{ şi } xyz = \frac{8}{105}.$$

Mihai Gârtan, Iaşi

VI.3. O familie de agricultori consumă anual 1000 kg de cartofi. La un kilogram de cartofi cultivat se obţine o recoltă de 10 kg. Să se afle care este cantitatea minimă de cartofi ce trebuie cultivată în acest an pentru ca după trei ani recolta obţinută să asigure consumul şi sămânţa pentru anul următor.

Mihai Gârtan, Iaşi

VI.4. Dacă au loc două dintre afirmaţiile:

1° a, b, c sunt direct proporţionale cu p, q, r;

2° p, q, r sunt invers proporţionale cu u, v, w;

3° u, v, w sunt invers proporţionale cu a, b, c,

unde a, b, c, p, q, r, u, v, w sunt numere raţionale nenule, atunci are loc şi a treia. Generalizare.

***

VI.5. Să se calculeze sumele:

$S_1 = 19999...99 + 19898...98 + 19797...97 + ... + 19090...90,$

$S_1 = 19999...99 - 19898...98 + 19797...97 - ... - 19090...90,$

ai căror termeni au $2n + 1$ cifre.

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

Clasa a VII-a

VII.1. Să se demonstreze că numărul:

$$m = 16^n + 8^n + 4^n + 2^{3n} + 2^{2n} + 2^n$$

nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

Cătălin Calistru, Iaşi

VII.2. Fie a, $b \in \mathbf{Z}^*$ astfel încât $3a + 7b = 21$. Să se determine cea mai mică valoare a numărului $|a - b|$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VII.3. Fie cercurile $C(0, r)$ şi $C(\mathrm{P}, 2r)$, primul fix şi al doilea variabil o dată cu centrul său P. Să se determine următoarele mulţimi de puncte:

1° $\mathbf{M}_1 = \{\mathrm{P}; \mathrm{Q} \in \mathrm{D} \cap \mathrm{D}'\}$ unde Q este mijlocul segmentului OP, iar D şi D′ sunt discurile determinate de $C(\mathrm{O}, r)$ şi respectiv $C(\mathrm{P}, 2r)$;

2° $\mathbf{M}_2 = \{\mathrm{P}; r < t < 2r\}$, unde t este lungimea tangentei comune exterioare;

3° $\mathbf{M}_3 = \{\mathrm{P}; t = 2\bar{t}\}$, unde $\bar{t}$ este lungimea tangentei comune interioare;

4° $\mathbf{M}_4 = \{\mathrm{P}; \alpha < 60°\}$, unde α este măsura unghiului format de tangentele comune exterioare.

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

VII.4. Fie Δ ABC cu $m(\hat{A}) = 90°$ şi $AB = \frac{1}{2}BC = a$. Fie D pe BC astfel încât BD = DC. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\angle ABC$ şi respectiv $\angle ADC$ sunt concurente în G. Demonstraţi că ΔGDC este echilateral şi aflaţi S_{AOG}, unde $\{O\} = BG \cap CA$.

Baron Traian, cl. a VII-a, Lic. "Garabet Ibrăileanu", Iaşi

VII.5. Arătaţi că, dacă $x, y \in \mathbf{Q}$, $xy \in \mathbf{Z}$ şi $x + y \in \mathbf{Z}$, atunci $x, y \in \mathbf{Z}$.

Marius Durea, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII.1. **1)** Arătaţi că există o infinitate de pătrate perfecte de forma $4^a + 6^b + 9^c$, unde $a, b, c \in \mathbf{N}$.

2) Arătaţi că nu există pătrate perfecte de forma $4^a + 5^b + 9^c$ cu $a, b, c \in \mathbf{N}$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

VIII.2. Determinaţi $x, y \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$x^n + y^n = nxy - (n-2),\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Dumitru Neagu, Iaşi

VIII.3. Fie polinomul

$$P(X) = 3X(2X-1)^{1999} + aX^2 + bX + c \quad (a, b, c \in \mathbf{R}).$$

Să se determine a, b, c ştiind că 0 (zero) este rădăcină a lui $P(X)$, suma coeficienţilor acestuia este egală cu 8 şi restul împărţirii lui $P(X)$ la $X + 1$ este 1.

Marius Durea, Iaşi

VIII.4. Să se demonstreze că paralelipipedul dreptunghic de dimensiuni a, b, c şi diagonală d pentru care există relaţia

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) = d^4$$

este un cub.

Cătălin Calistru, Iaşi

VIII.5. Fie ABC un triunghi iar (α) un plan ce nu conţine triunghiul. Dacă A', B' şi C' sunt proiecţiile punctelor A, B şi respectiv C pe planul (α) şi $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, atunci $(ABC)\quad(\alpha)$.

Constantin Cocea, Iaşi

Clasa a IX – a

IX.1. Se consideră trinomul $y(x) = x^2 + 2px + p$, în care p este un parametru real. Să se afle valorile lui p pentru care

$$\max_{0\le x\le 1} y(x) + \min_{0\le x\le 1} y(x) = 0.$$

Adrian Corduneanu, Iaşi

IX.2. Fie P un punct fixat în interiorul unui cerc şi AB o coardă variabilă care trece prin P. Pe mediatoarea segmentului AB se consideră un punct M astfel încât AM = k = constant. Să se afle locul geometric al punctului M. Discuţie după $k > 0$.

Cătălin Calistru, Iaşi

IX.3. Fie funcţiile f: $(-1, \infty)\to$ **R**, g: $(b, \infty)\to$ **R**, h: $(-1, \infty)\to$ **R** definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & |x|<1 \\ a, & x\ge 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & b\le x<1 \\ x-1, & x\ge 1 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 1, & -1<x<0 \\ x(x+1), & 0\le x<1 \\ cx+d, & x\ge 1 \end{cases},$$

unde $a, b, c, d\in$ **R**.

1° Să se determine valorile lui a şi b pentru care există $g\circ f$.

2° Presupunând că există $g\circ f$, să se afle valorile parametrilor c şi d pentru care $g\circ f = h$.

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

IX.4. Fie **A** = {1, 2, 3, ..., 2000} şi f:**A**$\to$**A** astfel încât $f\circ f\circ f = \mathbf{1}_A$. Arătaţi că f are cel puţin două puncte fixe. (Se spune că $n\in$**A** este punct fix al funcţiei f dacă $f(n) = n$.)

Gheorghe Iurea şi Petru Răducanu, Iaşi

IX.5. Fie f, g: **A**$\to$**A** ($\emptyset \ne$ **A** $\subset$ **R**) cu proprietatea că una din funcţiile f şi g este injectivă sau surjectivă. Dacă există $m, n\in$ **N*** relativ prime între ele astfel încât $f^m = g^m$ şi $f^n = g^n$, atunci $f = g$ (prin f^n s-a notat $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n \text{ ori}}$).

Constantin Cocea şi Neculai Hârţan, Iaşi

Clasa a X-a

X.1. Fie numerele $z_k \in \mathbf{C}$, $k=\overline{1,n}$, astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k|^n = a \quad \text{şi} \quad \left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = b > 0.$$

Să se arate că $|z_k| \geq \frac{b}{a}$ măcar pentru un indice k, $1 \leq k \leq n$.

Simona Haivas, cl. a X –a, Lic. "C. Negruzzi", Iaşi

X.2. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$2^{2x} + 2^{-2x} + 2(2^x - 2^{-x}) = a + 2,$$

unde $a \in \mathbf{R}$.

Petru Răducanu, Iaşi

X.3. Fie polinomul

$$\mathbf{P}(x, y, z) = ay^2z^2 + bz^2x^2 + cy^2x^2 + xyz\,(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

cu a, b, c nenuli şi $\alpha\beta\gamma < 0$. Să se dovedească echivalenţa afirmaţiilor:

1) există un polinom $\mathbf{Q}(x, y, z)$ astfel încât

$$\mathbf{P}(x, y, z) = [\mathbf{Q}(x, y, z)]^2;$$

2) coeficienţii lui x^2 şi x (în polinomul $\mathbf{P}$(x, y, z)) au un factor comun de gradul întâi şi această proprietate o au şi coeficienţii lui y^2 şi y, cât şi ai lui z^2 şi z.

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

X.4. a) Demonstraţi că

$$n!\left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(n+k)!}\right] \notin \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ \forall k \in \mathbf{N}^*.$$

b) Arătaţi că există o infinitate de perechi (n, k) cu $n, k \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $k \geq 1$, astfel încât

$$\log_n (n + k) + \log_{n+k} n \in \mathbf{Q}.$$

Gheorghe Iurea şi Petru Răducanu, Iaşi

X.5. Pe laturile unui triunghi ABC construim în exterior triunghiurile echilaterale A′BC, B′CA şi, respectiv, C′AB. Să se arate că triunghiul A′B′C′ este echilateral dacă şi numai dacă ABC este echilateral.

Constantin Cocea, Iaşi

Clasa a XI – a

XI. 1. Să se stabilească semnul funcţiei f: $(0, \infty) \to \mathbf{R}$ dată prin relaţia
$$f(x) = bx - \log_a x,$$
unde $0 < a < 1$, $b < \frac{1}{e \cdot \ln a}$, e = numărul lui Euler.

Gheorghe Costovici, Iaşi

XI.2. Fie funcţia f:$(0, \infty) \to \mathbf{R}$ definită prin
$$f(x) = x(1 - 2^{-\frac{1}{x}}).$$
Să se arate că f este crescătoare.

Constantin Cocea, Iaşi

XI.3. În interiorul unui unghi drept, cu vârful în O şi cu laturile Ox şi Oy se ia un punct A situat la distanţele a faţă de Ox şi b faţă de Oy. O secantă variabilă ce trece prin A taie Ox în M şi Oy în N. Se notează cu α măsura unghiului ascuţit făcut de MN cu latura Ox.

1° Să se exprime MN în funcţie de a, b şi α şi să se afle α pentru care segmentul MN are lungime minimă.

2° Să se calculeze raportul $\frac{AM}{AN}$ şi să se arate că AM = NP, unde P este proiecţia lui O pe MN, în cazul când MN are lungimea minimă.

Adrian Corduneanu, Iaşi

XI.4. Fie A şi B două puncte într-un plan şi Δ mediatoarea segmentului AB. Să se afle:

1) Locul punctelor P ce satisfac condiţia PA + PB = $\lambda \cdot d(P, \Delta)$; discuţie după $\lambda > 0$.

2) Locul punctelor P ce satisfac condiţia $|PA - PB| = \lambda \cdot d(P, \Delta)$; discuţie după $\lambda > 0$.

Paraschiva Bîrsan, Iaşi

XI.5. Fie $n \in$ N, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, ..., a_n$ numere întregi în progresie aritmetică. Arătaţi că:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}$$
se divide cu n^{n-2}.

Petru Răducanu, Iaşi

Clasa a XII – a

XII.1. Fie f: $[a, b]\to\mathbf{R}$ $(0 < a < b)$ o funcție derivabilă cu derivata continuă și care satisface condiția: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = bf(b) - af(a)$. Arătați că există un punct $c\in(a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

***

XII.2. Să se calculeze integrala

$$\mathbf{I}_n = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{d}x,$$

unde $n \geq 0$ este întreg.

Adrian Corduneanu, Iași

XII.3. Fie f: $[0, 1]\to$ **R** o funcție continuă și F: $[0, 1]\to$ **R** o primitivă a sa. Dacă $\mathbf{I}_n = \int_0^1 x^n\, \mathrm{F}(x)\mathrm{d}x$ pentru $n\in$ **N**, arătați că

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}_n = 0 \text{ și } \lim_{n\to\infty} n\mathbf{I}_n = \mathrm{F}(1).$$

Gheorghe Iurea, Iași

XII.4. Fie (**G**, ·) un grup. Dacă există m, $n\in\mathbf{N}^*$, $m \neq n$, și $a\in\mathbf{G}$ astfel încât $a^{2^{2^m}} = a^{2^{2^n}} = a^{-1}$, atunci $a = \mathrm{e}$.

Constantin Cocea, Iași

XII.5. Fie **A** un inel cu proprietatea că pentru orice $x\in\mathbf{A}$ pentru care $x^2 = 0$ urmează că $x = 0$. Notăm $\mathbf{D}(\mathbf{A}) = \{z\in\mathbf{A} \mid x^k z = zx^k,\ \forall x\in\mathbf{A} \text{ și } \forall k\in \mathbf{N}^*\}$ și $\mathbf{I}(\mathbf{A}) = \{z\in\mathbf{A} \mid z^2 = z\}$ (= mulțimea elementelor idempotente ale inelului A). Arătați că:

a) Dacă $x\in\mathbf{A}$ și $z\in\mathbf{I}(\mathbf{A})$, atunci $zx^k z = x^k z$, $\forall k\in \mathbf{N}^*$.

b) $\mathbf{I}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{D}(\mathbf{A})$.

Mihai Haivas, Iași