NOTA ELEVULUI

Diferenţe[1]

Alexia GRĂDINARU, Sabina GRĂDINARIU, Veronica ROTARU, Cristina STOLERIU[2,3]

Abstract. In this Note some problems raised by a game of differences are solved.
Keywords: game of differences.

MSC 2010: 91B99.

Un joc cu diferenţe. Pe prima linie a unui tabel cu 4 coloane sunt scrise numerele naturale a, b, c şi d. Pe linia următoare se scriu diferenţele $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-d|$ şi $|d-a|$. Completarea tabelului continuă după aceeaşi regulă, ca în exemplul următor:

7	3	9	2
4	6	7	5
2	1	2	1
1	1	1	1
0	0	0	0

În acest exemplu se observă că, după un număr de paşi, se obţin doar zerouri pe o linie. Acest joc cu diferenţe, propus de Conf. dr. *Claudiu Aurelian Volf*, ridică o serie de întrebări naturale:

1. Faptul că se ajunge, la un moment dat, la o linie nulă depinde de alegerea numerelor de pe prima linie sau se petrece indiferent de completarea primei linii cu numerele naturale a, b, c, d?

2. Ce se întâmplă dacă tabelul are nu 4 coloane, ci 3, 5, 6,... coloane?

3. Ce se întâmplă dacă numerele a, b, c, d sunt raţionale?

4. Ce se întâmplă dacă numerele a, b, c, d sunt reale?

Vom formula răspunsuri la aceste întrebări sub formă de probleme, pe care le vom soluţiona.

---

[1]Prezenta *Notă* reprezintă o variantă prescurtată a conferinţei *Game of Differences* susţinută în cadrul congresului **Math en Jeans** de la Cluj, aprilie 2017.

[2]Eleve, Colegiul Naţional Iaşi.

[3]Din echipa care a prezentat conferinţa au mai făcut parte elevii *Ştefan CRÂŞMĂREANU, Ionuţ PORCESCU* şi *Claudiu STAN*, tot de la Colegiul Naţional Iaşi. Conducătorul echipei a fost Conf. dr. *Claudiu Aurelian Volf*, Universitatea ,,Alexandru Ioan Cuza" Iaşi, asistat de profesorii *Gabriela Zanoschi* şi *Gabriel Popa*, Colegiul Naţional Iaşi.

Problema 1. *Să se arate că indiferent de alegerea numerelor naturale de pe prima linie, după un număr finit de paşi se va obţine o linie nulă.*

Soluţia 1. Mai întâi demonstrăm că, după cel mult 4 paşi, linia obţinută va conţine doar numere pare. Pentru aceasta, von înlocui numerele de pe prima linie cu resturile lor modulo 2 şi ar trebui să dovedim că, după cel mult 4 paşi, se ajunge la o linie formată doar din zerouri. Există $2^4 = 16$ modalităţi de a distribui resturile 0 şi 1 pe prima linie, cele subliniate mai jos; urmărim cum se transformă fiecare dintre aceste variante:

$$\begin{array}{l}
\underline{(0,0,0,1)} \to \underline{(0,0,1,1)} \to \underline{(0,1,0,1)} \to \underline{(1,1,1,1)} \to \underline{(0,0,0,0)} \\
\underline{(0,0,1,0)} \to \underline{(0,1,1,0)} \to \underline{(1,0,1,0)} \to (1,1,1,1) \to (0,0,0,0) \\
\underline{(0,1,0,0)} \to \underline{(1,1,0,0)} \to (0,1,0,1) \to (1,1,1,1) \to (0,0,0,0) \\
\underline{(1,0,0,0)} \to \underline{(1,0,0,1)} \to (1,0,1,0) \to (1,1,1,1) \to (0,0,0,0) \\
\underline{(1,1,1,0)} \to (0,0,1,1) \to (0,1,0,1) \to (1,1,1,1) \to (0,0,0,0) \\
\underline{(1,1,0,1)} \to (0,1,1,0) \to (1,0,1,0) \to (1,1,1,1) \to (0,0,0,0) \\
\underline{(1,0,1,1)} \to (1,1,0,0) \to (0,1,0,1) \to (1,1,1,1) \to (0,0,0,0) \\
\underline{(0,1,1,1)} \to (1,0,0,1) \to (1,0,1,0) \to (1,1,1,1) \to (0,0,0,0)
\end{array}$$

Tabloul va conţine, în acest moment, patru numere pare, ale căror resturi modulo 4 pot fi 0 sau 2. Un raţionament analog celui anterior, înlocuind combinaţiile de 0 şi 1 cu combinaţii de 0 şi 2, arată că, după cel mult încă 4 paşi, toate numerele de pe ultima linie vor fi divizibile cu 4.

Continuând, obţinem că, după cel mult $4k$ paşi, ultima linie va conţine doar numere divizibile cu 2^k. Astfel, numerele de pe ultima linie devin divizibile cu o putere oricât de mare a lui 2, adică ele vor fi, la un moment dat, $(0,0,0,0)$.
Soluţia 2 (schiţă). Fie $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c, d_1 = d$ şi $a_n = |a_{n-1} - b_{n-1}|$, $b_n = |b_{n-1} - c_{n-1}|$, $c_n = |c_{n-1} - d_{n-1}|$, $d_n = |d_{n-1} - a_{n-1}|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Notăm $x_n = \max\{a_n, b_n, c_n, d_n\}$. Se observă uşor, inductiv, că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător. O analiză destul de laborioasă arată că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu poate staţiona mai mult de 4 paşi la o aceeaşi valoare nenulă; rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ pentru care $x_{n_0} = 0$ şi atunci $x_n = 0$, $\forall n \geq n_0$, de unde concluzia dorită.

Problema 2. *Să se arate că, dacă tabelul are* $3, 5, 6$ *sau* 7 *coloane, există completări ale primei linii din care nu se poate obţine o linie formată numai din zerouri, oricâţi paşi am face.*

Soluţie. Este suficient să arătăm că, după un număr de paşi, algoritmul conduce la o buclă:
$(0,1,1) \to (1,0,1) \to (1,1,0) \to (0,1,1)$
$(0,0,0,1,1) \to (0,0,1,0,1) \to (0,1,1,1,1) \to (1,0,0,0,1) \to (1,0,0,1,0) \to$
$(1,0,1,1,1) \to (1,1,0,0,0) \to (0,1,0,0,1) \to (1,1,0,1,1) \to (0,1,1,0,0) \to$
$(1,0,1,0,0) \to (1,1,1,0,1) \to (0,0,1,1,0) \to (0,1,0,1,0) \to (1,1,1,1,0) \to (0,0,0,1,1)$

$(0,0,0,1,0,1) \to (0,0,1,1,1,1) \to (0,1,0,0,0,1) \to (1,1,0,0,1,1) \to (0,1,0,1,0,0) \to$
$(1,1,1,1,0,0) \to (0,0,0,1,0,1)$
$(0,0,0,0,0,1,1) \to (0,0,0,0,1,0,1) \to (0,0,0,1,1,1,1) \to (0,0,1,0,0,0,1) \to$
$(0,1,1,0,0,1,1) \to (1,0,1,0,1,0,1) \to (1,1,1,1,1,1,0) \to (0,0,0,0,0,1,1)$.

Observaţie. În cazul în care tabelul are 8 coloane, am arătat că, după un număr de paşi, se va obţine o linie formată numai din zerouri. Ideea demonstraţiei este aceeaşi cu cea din Soluţia 1 a Problemei 1, doar că partea de verificare este mult mai anevoioasă: prima linie poate fi completată în $2^8 = 256$ de moduri cu resturile modulo 2. Am lăsat parcurgerea algoritmului în seama unui calculator (am scris un program C++ în acest scop) şi, în cel mult 8 paşi, orice combinaţie de 0 şi 1 de pe prima linie a condus la o linie formată doar din zerouri.

Problema 3. *Să se arate că dacă prima linie conţine numai numere raţionale, algortimul va genera în mod necesar o linie nulă.*

Soluţie. Se observă uşor că, dacă prima linie este $L = (a, b, c, d)$ sau $tL = (ta, tb, tc, tb)$, algoritmul conduce (sau nu) la zerouri după acelaşi număr de paşi. Dacă plecăm cu patru numere raţionale pe prima linie, fie t cel mai mic multiplu comun al celor patru numitori. Linia tL va conţine patru numere naturale şi, după cum am văzut, la un moment dat se va obţine o linie formată doar din zerouri. Rezultă că şi completarea iniţială va conduce la o linie nulă.

Problema 4. *Să se arate că dacă prima linie conţine şi numere iraţionale, algoritmul nu va mai genera în mod necesar o linie nulă.*

Soluţie. Considerăm polinomul $P(t) = t^3 - t^2 - t - 1$. Cum $P(1) = -2 < 0$ şi $P(2) = 1 > 0$, rezultă că P are o rădăcină $t_0 \in (1, 2)$. Însă P nu are rădăcini raţionale (singurele variante ar fi 1 şi -1, care nu verifică), prin urmare $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Fie prima linie $(1, t_0, t_0^2, t_0^3)$; linia a doua va fi $(t_0 - 1, t_0(t_0 - 1), t_0^2(t_0 - 1), t_0^3(t_0 - 1))$, deoarece $t_0^2 + t_0 + 1 = t_0^3$. Inductiv, a $n-$a linie va conţine numerele $((t_0 - 1)^{n-1}, t_0(t_0 - 1)^{n-1}, t_0^2(t_0 - 1)^{n-1}, t_0^3(t_0 - 1)^{n-1})$, deci nu vom ajunge niciodată la o linie formată numai din zerouri.
