NOTA ELEVULUI

Puncte şi drepte izogonale în planul unui trapez

Ştefan DOMINTE[1]

Abstract. In this paper, there are presented a number of properties of collinearity and concicility of the centers of some circles associated with a trapezoid.

Keywords: trapezoid, circumcircle, isogonal lines, isogonal points.

MSC 2010: 51M04.

Această Notă pleacă de la două probleme privind trapezele din [**1**;p. 62]. Întrucât aceste probleme sunt prezentate numai prin figuri, fără niciun text pentru enunţurile şi rezolvările lor, vom începe prin a da detalii în această privinţă.

Problema 5.2.9 [1]. *Dat un trapez oarecare $ABCD$ ($AB||CD$), fie $\{X\} = AD \cap BC$ şi $\{Y\} = AC \cap BD$* (Fig.1)*. Dacă Z este punctul de intersecţie a cercurilor (YAD) şi (YBC), diferit de Y, atunci semidreptele XY şi XZ sunt izogonale în raport cu unghiul $\widehat{AXB}$.*

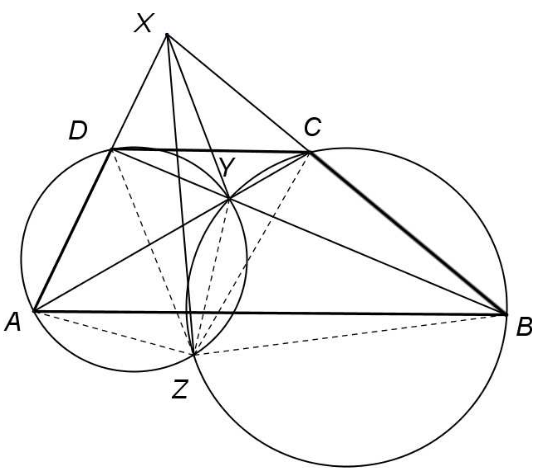

Fig. 1

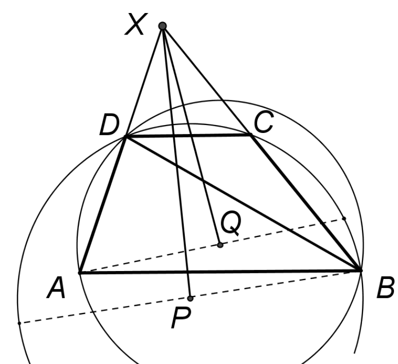

Fig. 2

Soluţie. Pentru patrulaterul complet $XDYCAB$, punctul Z este punctul lui Miquel [**3**; p. 25]; aşadar Z se află şi pe cercurile (XAC) şi (XBD). Să arătăm că $\triangle XYA \sim \triangle DYZ$. Cum $\widehat{XAY} = \widehat{DZY}$, rămâne să arătăm că $\dfrac{AX}{AY} = \dfrac{ZD}{ZY}(*)$. În acest scop, să observăm mai întâi că $\triangle XDZ \sim \triangle CYZ$ ($\widehat{DXZ} = \widehat{YCZ}$ şi $\widehat{XZD} = \widehat{CZY}$ - patrulatere inscriptibile) şi, deci, avem: $\dfrac{ZD}{ZY} = \dfrac{XD}{CY}$ (**). Apoi, din teorema

[1]Elev, cl. a XI-a, Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti; *stef_dominte@yahoo.com*

lui Menelaus pentru $\triangle XAC$ cu transversala $D-Y-B$, obţinem: $\dfrac{YA}{YC}=\dfrac{BX}{BC}\cdot\dfrac{DA}{DX}=\dfrac{AX}{AD}\cdot\dfrac{DA}{DX}=\dfrac{AX}{DX}$, de unde $\dfrac{YA}{YC}=\dfrac{XA}{CD}(***)$. Ca urmare, $\dfrac{ZD}{ZY}\overset{(**)}{=}\dfrac{XD}{CY}\overset{(***)}{=}\dfrac{XA}{YA}$ şi în consecinţă, relaţia $(*)$ are loc. Din asemănarea $\triangle XYA \sim \triangle DYZ$ rezultă că $\widehat{AXY}=\widehat{ZDY}$. Dar $\widehat{ZDY}=\widehat{ZDB}=\widehat{ZXB}$. Aşadar, $\widehat{AXY}=\widehat{ZXB}$, adică AY şi AZ sunt izogonale.

Problema 5.2.10 [1]. *Se notează cu X intersecţia laturilor neparalelele ale trapezului $ABCD$ ($AB||CD$) şi cu P şi Q centrele cercurilor (BCD), respectiv (ABD)* (Fig.2). *Atunci, semidreptele XP şi XQ sunt izogonale faţă de unghiul $\widehat{AXB}$.*

Soluţie. Vom arăta că $\triangle XPB \sim \triangle XQA(*)$, de unde va rezulta că $\widehat{PXB}=\widehat{QXA}$, deci XP şi XQ vor fi izogonale. Într-adevăr, avem: $\widehat{PBX}=\widehat{PBC}=90^\circ-\widehat{BDC}=90^\circ-\widehat{ABD}=\widehat{QAD}=\widehat{QAX}$ şi, deci, $\widehat{PBX}=\widehat{QAX}(**)$. Pe de altă parte, cu teorema sinusurilor, avem: $\dfrac{PB}{QA}=\dfrac{BD}{\sin(\widehat{BCD})}\cdot\dfrac{\sin(\widehat{BAD})}{BD}=\dfrac{\sin(\widehat{BAX})}{\sin(\pi-\widehat{ABX})}=\dfrac{BX}{AX}$, de unde $\dfrac{BP}{AQ}=\dfrac{BX}{AX}(***)$. Din $(**)$ şi $(***)$ rezultă $(*)$.

Observaţie. Izogonalele XP şi XQ coincid cu bisectoarea unghiului $\widehat{AXB}$ dacă şi numai dacă această bisectoare este perpendiculară pe diagonala BD sau pe AC.

Scopul acestei Note este de a indica noi proprietăţi ale configuraţiilor din aceste probleme sau ale unora de acelaşi fel.

Propoziţia 1. *Să reluăm notaţiile din Problema 5.2.9 şi, în plus, să notăm cu O_1 şi O_2 centrele cercurilor (YAD), respectiv (YBC)* (Fig.3). *Atunci, avem:*

(i) Semidreptele XO_1 şi XO_2 sunt izogonale în raport cu unghiul $\widehat{AXB}$.

(ii) Patrulaterul O_1YO_2Z este ortodiagonal şi circumscriptibil.

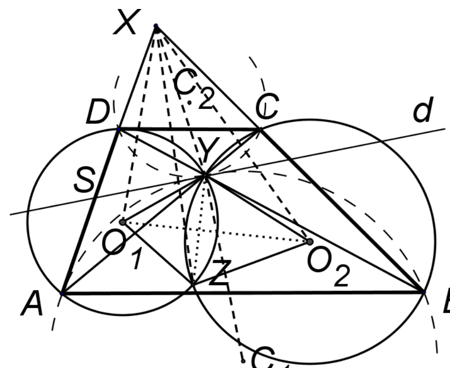

Fig. 3

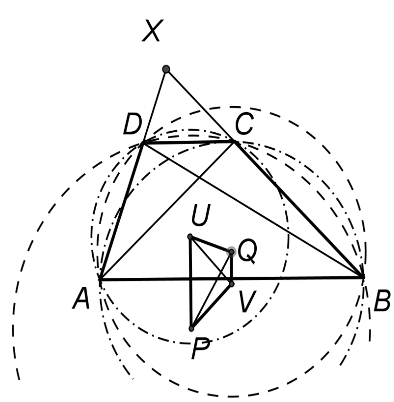

Fig. 4

Demonstraţie. (i) Arătăm că $\triangle AXO_1 \sim \triangle BXO_2$ cu aceleaşi argumente ca în Problema 5.2.10. Avem: $\widehat{XAO_1}=90^\circ-\widehat{AYD}=90^\circ-\widehat{BYC}=\widehat{XBO_2}$, deci

$\widehat{XAO_1} = \widehat{XBO_2}(*)$. Pe de altă parte, $\dfrac{AO_1}{BO_1} = \dfrac{AD}{\sin(\widehat{AYD})} \cdot \dfrac{\sin(\widehat{BYC})}{BD} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{AX}{BX}$, de unde $\dfrac{AO_1}{BO_1} = \dfrac{AX}{BX}(**)$. Din $(*)$ şi $(**)$ rezultă că $\triangle AXO_1 \sim \triangle BXO_2$ şi de aici faptul că afirmaţia (i) este adevărată.

(ii) Această afirmaţie reiese din faptul că O_1O_2 este mediatoarea corzii comune YZ şi avem $O_1Y + O_2Z = O_1Z + O_2Y$.

Propoziţia 2. *În (Fig.4), se adaugă diagonala AC şi se notează cu U şi V centrele cercurilor (ACD), respectiv (ABC). Au loc următoarele afirmaţii:*

(i) Semidreptele XU şi XV sunt izogonale faţă de unghiul $\widehat{AXB}$.

(ii) Patrulaterele $ABCD$ şi $UPVQ$ sunt trapeze ortogonale şi asemenea.

Demonstraţie. (i) Aşa cum s-a arătat că XP şi XQ sunt izogonale.

(ii) Utilizând proprietatea de perpendicularitate a liniei centrelor şi a corzii comune a două cercuri secante, avem $UP \perp CD$, $VQ \perp AB$, $PV \perp BC$, $QU \perp AD$, precum şi $PQ \perp BD$, $UV \perp AC$. Aşadar, patrulaterele $ABCD$ şi $UPVQ$ sunt ortogonale; mai mult, diagonalele ce se corespund sunt perpendiculare (Fig.4). Evident, $UPVQ$ este trapez ($UP \perp CD, VQ \perp AB$ şi $AB||CD$). Proprietăţile de perpendicularitate puse în evidenţă conduc imediat la congruenţele: $\widehat{U} = \widehat{A}, \widehat{P} = \widehat{B}, \widehat{V} = \widehat{C}$ şi $\widehat{Q} = \widehat{D}$ $(*)$. Apoi, din faptul că $\triangle UPV \sim \triangle ABC$, $\triangle PVQ \sim \triangle BCD$, $\triangle VQU \sim \triangle CDA$, obţinem: $\dfrac{UP}{AB} = \dfrac{PV}{BC} = \dfrac{VQ}{CD} = \dfrac{QU}{DA}(**)$. În final, din $(*)$ şi $(**)$, rezultă că trapezele $ABCD$ şi $UPVQ$ sunt asemenea.

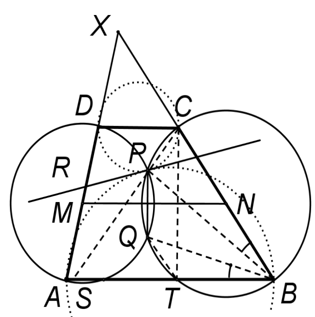

Fig. 5

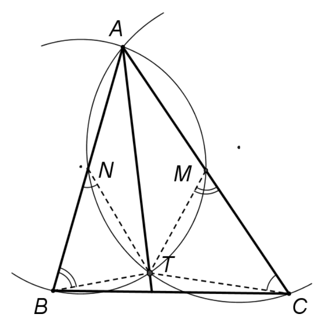

Fig. 6

Observaţii. 1) Dacă trapezul $ABCD$ este isoscel, cercurile (ABC), (ABD), (ACD) şi (BCD) coincid cu cercul circumscris lui. 2) Plecând de la $UPVQ$ obţinem în acelaşi mod un nou trapez asemenea cu $ABCD$ şi cu laturile paralele cu ale acestuia.

Propoziţia 3. *Dat un trapez $ABCD$ $(AB||CD)$, fie $\{X\} = AD \cap BC$. Dacă cercurile de diametre AD şi BC se intersectează în P şi Q, atunci aceste puncte sunt izogonal conjugate în raport cu triunghiul $\triangle ABX$* (Fig. 5).

Demonstraţie. Întrucât MN este linia centrelor şi PQ este coarda comună cercurilor, avem $PQ \perp MN$. De asemenea, $CT \perp AB$, unghiul $\widehat{CTB}$ fiind înscris într-un semicerc (Fig.5). Ca urmare, $PQ||CT$; altfel spus, patrulaterul $CPQT$ este trapez isoscel. Acest fapt ne permite să scriem că $\widehat{PBC} = \widehat{QBT}$, adică semidreptele BP şi BQ sunt izogonale faţă de unghiul $\widehat{ABC}$. Similar, se arată că semidreptele AP şi AQ sunt izogonale faţă de unghiul $\widehat{BAD}$.

Observaţie. Cercurile de diametre AD şi BC sunt tangente în cazul în care punctele P şi Q coincid, adică vor fi tocmai punctul de intersecţie al liniei mijlocii MN a trapezului dat cu bisectoarea unghiului $\widehat{AXB}$.

Revenind la Propoziţia 1, vom aduce completări prin considerarea cercurilor (YAB) şi (YCD); să notăm cu $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ aceste cercuri şi cu C_1 şi C_2 centrele lor (Fig.3).

Propoziţia 4. *În condiţiile din Propoziţia 1 şi cu notaţiile precedente în legătură cu punctul Y, sunt adevărate proprietăţile*:
(i) *Patrulaterul $O_1C_1O_2C_2$ este paralelogram.*
(ii) *Cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt tangente în Y.*

Demonstraţie. (i) Din faptul că $C_1O_1 \perp YA$ şi $C_2O_2 \perp YC$ rezultă că $C_1O_1 || C_2O_2(*)$. Similar, din $C_1O_2 \perp YB$ şi $C_2O_2 \perp YD$ rezultă că $C_1O_2||C_2O_1(**)$. Relaţiile $(*)$ şi $(**)$ spun că $O_1C_1O_2C_2$ este paralelogram.

(ii) Fie d tangenta în Y la cercul $\mathcal{C}_1$ şi S un punct pe d. Avem: $\widehat{YDC} + \widehat{YCD} = \widehat{DYA} = \widehat{DYS} + \widehat{SYA} = \widehat{DYS} + \widehat{YBA} = \widehat{DYS} + \widehat{YDC}$, de unde obţinem că $\widehat{YCD} = \widehat{DYS}$, adică faptul că d este tangentă la cercul $\mathcal{C}_2$ în Y.

O proprietate similară celei din propoziţia precedentă poate fi pusă în evidenţă pentru punctele izogonal conjugate P şi Q din Propoziţia 3.

Propoziţia 5. *Dat fiind un trapez $ABCD$ $(AB||CD)$ şi ţinând cont de notaţiile din Propoziţia 3, cercurile $(PAB), (PCD)$ sunt tangente în P, iar cercurile (QAB), (QCD) sunt tangente în Q* (Fig.5).

Demonstraţie. Fie d tangenta în P la cercul (PAB) şi R un punct pe ea. Notăm $\{S\} = PC \cap AB$. Avem: $\widehat{DCP} + \widehat{PBA} = \widehat{CSB} + \widehat{PBA} = \widehat{CPB} = 90^\circ = \widehat{DPA} = \widehat{DPR} + \widehat{RPA} = \widehat{DPR} + \widehat{PBA}$, de unde $\widehat{DCP} = \widehat{DPR}$, deci d este tangentă în P la cercul (PCD). Analog se arată şi partea a doua a propoziţiei.

Fie $\triangle ABC$ şi L, M, N mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB. Relativ la fiecare dintre trapezele $BCMN, CANL, ABLM$ se pot considera puncte de tipul $O_1, O_2, Y, Z, P, Q, U, V$ (Propoziţiile 1 şi 2). Este foarte posibilă existenţa unei legături între anumite grupe de astfel de puncte. Ne limităm la circumcentrele triunghiurilor care au o mediană ca latură; în total sunt 12 triunghiuri de acest fel. Triunghiurile determinate de mediana AL sunt: $\triangle ALB, \triangle ALC, \triangle ALN$ şi $\triangle ALM$, iar pentru circumcentrele lor folosim notaţiile: O_1^A, O_2^A, O_3^A, respectiv O_4^A. În mod asemănător se introduc circumcentrele O_i^B şi O_i^C $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Lemă. *Fie M şi N mijloacele laturilor AC, respectiv AB ale triunghiului $\triangle ABC$. Atunci cercurile (ABM) şi (ACN) se intersectează a doua oară într-un punct T situat pe simediana din A* (Fig. 6).

Demonstraţie. Deoarece $\widehat{BNT} = \widehat{ACT}(= 180° - \widehat{ANT})$ şi $\widehat{NBT} = \widehat{TMC}(= 180° - \widehat{AMT})$, rezultă că $\triangle NBT \sim \triangle CMT$. Ca urmare, $\dfrac{\text{dist}(T, NB)}{\text{dist}(T, MC)} = \dfrac{NB}{MC} = \dfrac{AB}{AC}$, de unde decurge că T este pe simediana [**2**] dusă din A.

Propoziţia 6. *Punctele $O_i^A, O_i^B, O_i^C (i = 1, 2, 3, 4)$, cu semnificaţiile de mai sus, au următoarele proprietăţi:*

(i) $O_1^A, O_2^A, O_3^A, O_4^A$ sunt coliniare; anume, sunt situate pe mediatoarea medianei din A. Afirmaţii analoage relativ la vârfurile B şi C ale $\triangle ABC$.

(ii) $O_1^C, O_2^B, O_3^A, O_4^A$ sunt conciclice; la fel sunt şi cvadruplele analoage.

(iii) $O_1^A, O_2^A, O_1^C, O_2^B$ sunt conciclice; la fel şi analoagele.

Demonstraţie. (i) Este vorba de centrele cercurilor $(ABL), (ACL), (ANL)$ şi (AML), care au mediana AL drept coardă comună. Evident, centrele lor se află pe mediatoarea segmentului AL.

(ii) Relativ la cercurile (AMB) şi (AML) observăm că avem $O_2^B O_4^A \perp AM$, iar în privinţa cercurilor (ANL) şi (AML) avem $O_3^A O_4^A \perp AL$; ca urmare $\widehat{O_3^A O_4^A O_2^B} \equiv \widehat{MAL} \pmod{\pi}$ $(*)$. Analog, obţinem, în conformitate cu Lema, că $O_1^C O_2^B \perp AT$ (simediana din A), precum şi faptul că $O_1^C O_3^A \perp AN$; din acestea, rezultă că $\widehat{O_3^A O_1^C O_2^B} \equiv \widehat{TAN} \pmod{\pi}$ $(**)$. Deoarece AT este simediană, avem relaţia $\widehat{TAN} = \widehat{LAM} (***)$. Combinând $(*), (**), (***)$, obţinem că are loc relaţia $\widehat{O_3^A O_4^A O_2^B} \equiv \widehat{O_3^A O_1^C O_2^B} \pmod{\pi}$, adică punctele $O_1^C, O_2^B, O_3^A, O_4^A$ sunt conciclice.

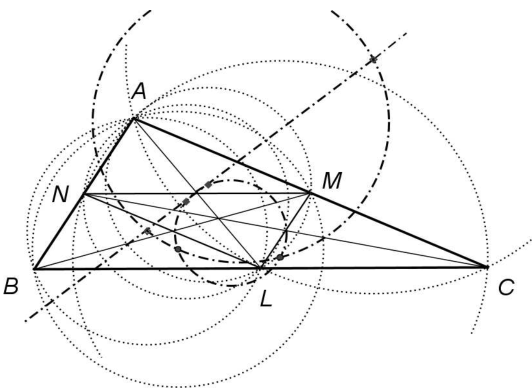

Fig. 7

(iii) Se procedează ca la punctul (ii).

Observaţie. Să împărţim în două grupe cele 12 cercuri asociate figurii formate din triunghiul dat şi cel median:

(I) $(AMB), (ANC); (BNC), (BLA); (CLA), (CMB)$;

(II) $(AML), (ANL); (BNM), (BLM); (CLN), (CMN)$.

Evident, punctul G (centrul de greutate) este centrul radical al cercurilor din grupa (I), iar punctul K (simedian) este, pe baza Lemei, centrul radical al cercurilor din grupa (II); în particular, aceste centre radicale sunt izogonal conjugate.

Bibliografie

1. **A. Akopyan** – *Geometry in Figures*, 2011.
2. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, 1958.
3. **L. Nicolescu, V. Boskoff** – *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.