Procedeu de rezolvare a unor probleme cu matrice

Emanuel NECULA[1]

Abstract. A procedure for solving certain problems that involve matrices of the same order is proposed and applied. It is based upon the Proposition 1 and the identities (1)-(9).

Keywords: matrix, commutant, nilpotent, determinant.

MSC 2010: 97D40.

În această Notă vom prezenta un procedeu de rezolvare a unor probleme privind matrice de acelaşi ordin cu elemente în $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Procedeul propus are la bază următorul rezultat simplu:

Propoziţia 1. *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, unde $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ şi $\mathbb{K}$ este $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, există două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ astfel încât $A = X + Y$ şi $B = X - Y$.*

Demonstraţie. Se consideră $X = \frac{1}{2}(A + B)$ şi $Y = \frac{1}{2}(A - B)$.

Vor fi folosite des, mai jos, următoarele relaţii evidente:

(1) $A + B = 2X, A - B = 2Y$,

(2) $A^2 = (X + Y)^2 = X^2 + Y^2 + XY + YX$,

(3) $B^2 = (X - Y)^2 = X^2 + Y^2 - XY - YX$,

(4) $AB = (X + Y)(X - Y) = X^2 - Y^2 - XY + YX$,

(5) $BA = (X - Y)(X + Y) = X^2 - Y^2 + XY - YX$,

(6) $A^2 + B^2 = 2(X^2 + Y^2)$, (7) $A^2 - B^2 = 2(XY + YX)$,

(8) $AB + BA = 2(X^2 - Y^2)$, (9) $AB - BA = 2(YX - XY)$.

De asemenea, vom folosi şi următorul rezultat cunoscut şi cu demonstraţie simplă:

Propoziţia 2. *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, atunci există $\alpha \in \mathbb{K}$ astfel încât $det(A + xB) = x^2 detB + x\alpha + detA$; mai precis, $\alpha = tr\, A \cdot tr\, B - tr\, AB$.*

Vom ilustra procedeul propus pe un număr de probleme.

Problema 1. *Fie n un număr natural nenul şi A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătaţi că matricea $AB - BA$ este singulară.* (*ONM*, 2014)

Demonstraţie. Considerăm matricele $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care $A = X + Y$ şi $B = X - Y$. Conform relaţiilor (6) şi (4), condiţia din problemă se scrie $-2Y^2 = XY - YX = [X, Y]$ (comutatorul matricelor X şi Y).

Deoarece Y comută cu $-2Y^2$, rezultă că Y comută şi cu $[X, Y]$. Deci, conform lemei lui Jacobson, comutatorul celor două matrice este niloptent şi rezultă că $\det(XY - YX) = 0$. Folosind şi relaţia (9), deducem concluzia cerută.

Problema 2. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice nilpotente şi astfel încât $AB = BA$. Să se arate că $AB = O_2$.* (*Concursul ,,Laurenţiu Duican"*, 2011).

Demonstraţie. Din ipoteză, avem: $A^2 = B^2 = O_2$, $AB = BA$, $A \neq O_2$, $B \neq O_2$, care se rescriu astfel: (i) $X^2 + Y^2 + XY + YX = O_2$, (ii) $X^2 + Y^2 - XY - YX = O_2$, (iii) $XY = YX$, (iv) $X \neq \pm Y$.

[1]Elev, cl. a XII-a, Col. Naţ. de Inf. ,,Dinicu Golescu", C-lung Muscel; *emi-emi@yahoo.ro*

Adunând (i) şi (ii), obţinem: (v) $X^2 + Y^2 = O_2$. Din (i) şi (v) rezultă că avem (vi) $XY + YX = O_2$. Din (vi) şi (iii) deducem că (vii) $XY = YX = O_2$.

Înmulţind relaţia (v) cu X (la dreapta sau la stânga) şi folosind (vii), obţinem că $X^3 = O_2$, adică X este nilpotentă şi, ca urmare, (viii) $X^2 = O_2$.

Din (v) şi (viii) rezultă că (ix) $Y^2 = O_2$. Combinând relaţia (4) cu (vii)-(ix), deducem că $AB = O_2$, c.c.t.d.

Problema 3. *Se consideră matricele* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, pentru care* $AB + BA = O_n$*. Dacă* $\det(A + B) = 0$*, arătaţi că* $\det(A^3 - B^3) = 0$. (*Cristian Chiser*, RMT - 1/2011).

Demonstraţie. Folosind relaţiile (8) şi (1), obţinem că (i) $X^2 = Y^2$ şi (ii) $\det X = 0$. Se verifică uşor că $A^3 - B^3 = 2(Y^3 + X^2Y + YX^2 + XYX)$, deci

$$\begin{aligned}\det(A^3 - B^3) &= 2^n \det(Y^3 + X^2Y + YX^2 + XYX) \\ &\overset{(i)}{=} 2^n \det(X^2Y + X^2Y + YY^2 + XYX) = 2^n \det(2X^2Y + Y^2Y + XYX) \\ &\overset{(i)}{=} 2^n \det(3X^2Y + XYX) = 2^n \det X \cdot \det(3XY + YX) \overset{(ii)}{=} 0,\end{aligned}$$

adică $\det(A^3 - B^3) = 0$, c.c.t.d.

Problema 4. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *astfel încât det*$(AB + BA) \leq 0$*. Să se arate că det*$(A^2 + B^2) \geq 0$.

Demonstraţie. Folosind relaţiile (8) şi (6), ipoteza devine (i) $\det(X^2 - Y^2) \leq 0$, iar concluzia se rescrie ca $\det(X^2 + Y^2) \geq 0$. Observăm că $\det X, \det Y \in \mathbb{R}$, deoarece $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Este natural să considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(a) = \det(X^2 + aY^2) = a^2 \det Y^2 + a\alpha + \det X^2,$$

conform Propoziţiei 2, unde $a \in \mathbb{R}$.

Din (i) rezultă că $f(-1) \leq 0$, adică $\det Y^2 + \det X^2 \leq \alpha$. Cum $\det X^2 = (\det X)^2 \geq 0$ şi, analog, $\det Y^2 \geq 0$, deducem că (ii) $0 \leq \det Y^2 + \det X^2 \leq \alpha$. Ca urmare,

$$\det(X^2 + Y^2) = f(1) = \det Y^2 + \alpha + \det X^2 \overset{(ii)}{\geq} 0 + 0 = 0, \text{c.c.t.d.}$$

Problema 5. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *şi proprietăţile:*
p_1: $\det(A - B) = \det(A + B)$,
p_2: $\det(A^2 - B^2) = \det(A^2 + B^2)$,
p_3: $\det(AB - BA) = \det(AB + BA)$.
Arătaţi că, dacă două dintre propoziţiile de mai sus sunt adevărate, atunci şi cea rămasă este adevărată. (*Mihai Opincariu*, GMB-3/2009).

Demonstraţie. Ţinând seama de relaţiile (1), (6)-(9), propoziţiile p_1, p_2, p_3 se scriu în forma: p_1: $\det X = \det Y$, p_2: $\det(X^2 + Y^2) = \det(XY + YX)$, $p_3 : \det(X^2 - Y^2) = \det(YX - XY)$.

Notăm $p := \det X$, $q := \det Y$, $(p, q \in \mathbb{R})$. Conform Propoziţiei 2, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru care avem:

$$\begin{aligned}\det(X^2 + aY^2) &= a^2 \det Y^2 + \alpha a + \det X^2 = a^2(\det Y)^2 + \alpha a + (\det X)^2\\ &= a^2 q^2 + \alpha a + p^2,\\ \det(YX + aXY) &= \det(XY)a^2 + \beta a + \det(YX) = pqa^2 + \beta a + pq.\end{aligned}$$

Cele trei propoziţii se rescriu astfel: $p_1 : p = q$, p_2: $q^2 + \alpha + p^2 = pq + \beta + pq$, $p_3 :$ $q^2 - \alpha + p^2 = pq - \beta + pq$.

Să presupunem că $p_1 : p = q$ este adevărată. Atunci, avem:

$$\begin{aligned}&q^2 + \alpha + p^2 = pq + \beta + pq \Leftrightarrow 2p^2 + \alpha = 2p^2 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta\\ &\qquad \Leftrightarrow p^2 - \alpha + p^2 = p^2 - \beta + p^2 \Leftrightarrow q^2 - \alpha + p^2 = pq - \beta + pq.\end{aligned}$$

Deci, p_2 este adevărată dacă şi numai dacă p_3 este adevărată, adică au loc implicaţiile: $p_1 \wedge p_2 \to p_3$ şi $p_1 \wedge p_3 \to p_2$.

Dacă p_2 şi p_3 sunt adevărate, prin adunarea lor, obţinem:

$$2p^2 + 2q^2 = 4pq \Rightarrow (p - q)^2 = 0 \Rightarrow p = q,$$

deci p_1 este adevărată, iar problema este complet rezolvată.

În final, propunem cititorilor să folosească acelaşi procedeu în cazul problemelor:

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât $A \neq B$. Dacă $A^3 = B^3$ şi $A^2B = B^2A$, arătaţi că $A^2 + B^2$ este neinversabilă.

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $AB + BA = O_n$ şi $\det(A + B) = 0$. Demonstraţi că $\det(A^4 - B^4) = 0$. (*Traian Tămâian*, GMB - 7-8-9/2010)

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) $A^2 - B^2 = AB - BA$. Demonstraţi că $\det(A + B) = 0$ sau $\det(A - B) = 0$.

b) $A^2 + B^2 = AB + BA$. Arătaţi că $\det(A - B) = 0$. (*Florian Rotaru*, GMB - 4/1999)

4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice având proprietăţile: 1) $\det A > 0$, $\det B > 0$; 2) $A^2 - B^2 = AB - BA$; 3) $\det(A - B) = \det(A + B)$. Demonstraţi că $\det A = \det B$. (*Florian Rotaru*, RMT - 1/1998)

5. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, demonstraţi echivalenţa: $(AB - BA)^2 = O_2 \Leftrightarrow \det(A^2 - B^2) = \det((A + B)(A - B))$. (*Mihai Opincariu*, GMB - 7-8/2000)

Bibliografie

1. **V. Pop, L. Lupuşor** (coord.) – *Matematica pentru grupele de performaţă, cl. a XI-a*, Editura Dacia Educaţional, Cluj-Napoca, 2004.
2. **O. Şontea** – *Elemente de algebră liniară. Probleme pentru examene, concursuri şi olimpiadă*, Ed. Gil, Zalău, 2011.
3. **T. Tămâian** – *Matematică. Probleme pentru examene şi concursuri şcolare. Clasele IX-XII*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2013.