Două probleme de conciclicitate în triunghi

Ştefan DOMINTE [1]

Abstract. Two points are considered on each side of a triangle ABC. The following problem is approached: what peculiarity has the triangle when the six considered points are concyclic. The Propositions 1 - 6 give answers when the points have certain particular positions on the sides of the triangle ABC.

Keywords: incircle, nine-point circle, Taylor′s circle, concyclic points.

MSC 2010: 51M04.

Fie ABC un triunghi oarecare. Relativ la liniile importante într-un triunghi sunt binecunoscute următoarele rezultate [**1**; pp. 13, 78]:

Picioarele înălţimilor şi mijloacele laturilor unui triunghi sunt conciclice – **cercul celor nouă puncte** sau **cercul lui Euler** (cerc care trece şi prin mijloacele segmentelor determinate de ortocentrul triunghiului şi vârfurile sale).

Proiecţiile picioarelor înălţimilor unui triunghi pe celelalte două laturi sunt conciclice – **cercul lui Taylor.**

Vom utiliza notaţiile obişnuite pentru elementele triunghiului. Să mai notăm, corelat cu ordinea BC, CA, AB pentru laturi: H_a, H_b, H_c – picioarele înălţimilor; M_a, M_b, M_c – mijloacele laturilor; L_a, L_b, L_c – picioarele bisectoarelor; I_a, I_b, I_c – punctele de contact cu laturile ale cercului înscris şi J_a, J_b, J_c – punctele de contact cu interiorul laturilor ale cercurilor exînscrise.

Sugerat de rezultatele precedente, ne punem următoarele probleme:

Problema 1. *Dacă pe laturile triunghiului ABC considerăm alte perechi de puncte, diferite de perechile $(H_a, M_a), (H_b, M_b), (H_c, M_c)$ şi formate cu puncte alese dintre cele menţionate mai sus, ce se poate spune în privinţa conciclicităţii punctelor din aceste perechi?*

Problema 2. *Dacă proiectăm pe laturile BC, CA, AB mijloacele laturilor, picioarele bisectoarelor sau punctelor de contact cu laturile ale cercului înscris sau cercurilor exînscrise, ce se poate spune despre conciclicitatea celor şase puncte obţinute?*

Vom constata că această condiţie de conciclicitate este foarte restrictivă, căci impune triunghiului să fie echilateral. În cazul triunghiului echilateral, punctele $H_a, M_a, L_a.I_a, J_a$ coincid, ca şi punctele similare situate pe laturile CA şi AB, iar cercul de conciclicitate este cercul înscris triunghiului echilateral (ce coincide cu cercul Euler al triunghiului).

[1] Elev, cl. a X-a, Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti; *stef_dominte@yahoo.com*

Propoziţia 1. *Dacă picioarele bisectoarelor şi punctele de contact cu laturile ale cercului înscris sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Evident, cercul ce conţine punctele L_a, L_b, L_c şi I_a, I_b, I_c este cercul înscris triunghiului ABC. Cum punctul L_a se află şi pe BC şi pe cercul înscris, rezultă că L_a coincide cu I_a. Ca urmare, AL_a este şi bisectoare şi înălţime în triunghiul ABC, deci $AB = AC$. Similar se arată că $BA = BC$. In final, triunghiul ABC este echilateral.

Propoziţia 2. *Dacă punctele de contact cu laturile ale cercului înscris şi ale cercurilor exînscrise sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Se procedează la fel. Cercul care conţine cele şase puncte specificate în enunţ este cercul înscris triunghiului. Deducem că J_a coincide cu I_a, deci avem $BI_a = BJ_a$. Cum $BI_a = p - b$ şi $BJ_a = p - c$ [**1**; p. 30], obţinem că $b = c$. Analog se arată că $c = a$ şi, în final, triunghiul ABC este echilateral.

Observaţie. Dacă în componenţa perechilor de puncte luate pe laturile triunghiului se află picioarele înălţimilor sau mijloacele laturilor, atunci cercul celor şase puncte din aceste perechi este cercul lui Euler, care va juca rolul avut de cercul înscris în Problemele 1 şi 2. În acelaşi fel se constată că, limitându-ne la tipul de puncte considerate la început, ipoteza de conciclicitate impune triunghiului să fie echilateral; cu excepţia unui caz, acela al perechilor $(H_a, M_a), (H_b, M_b), (H_c, M_c)$, pentru care triunghiul poate să fie oarecare.

Propoziţia 3. *Dacă picioarele bisectoarelor şi punctele de contact cu laturile ale cercurilor exînscrise sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Scriind puterea punctului A faţă de cercul ce trece prin L_a, L_b, L_c şi J_a, J_b, J_c, obţinem: $AL_b \cdot AJ_b = AL_c \cdot AJ_c$. Este cunoscut faptul că $AL_b = \dfrac{bc}{c+a}, AL_c = \dfrac{bc}{b+a}, AJ_b = p - c$ şi $AJ_c = p - b$ [**1;** pp. 142, 144]. Înlocuind în egalitatea precedentă, obţinem uşor că $b = c$. Analog, apelând la puterea punctului B, deducem că $a = c$. Aşadar, triunghiul ABC este echilateral.

Propoziţia 4. *Dacă proiecţiile mijloacelor laturilor pe celelalte două laturi ale triunghiului sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Să notăm cu M_{ab} şi M_{ac} proiecţiile mijlocului M_a pe laturile CA, respectiv AB; notaţii similare relativ la mijloacele M_b şi M_c (Fig. 1). Avem:

$$\begin{aligned}
\widehat{C} &\overset{1}{=} \widehat{AM_bM_c} \overset{2}{=} \widehat{AM_{bc}M_{cb}} \overset{3}{=} \widehat{M_{ac}M_{ca}M_{cb}} \\
&= \widehat{M_{ac}M_{ca}M_c} + \widehat{M_cM_{ca}M_{cb}} \\
&\overset{4}{=} \widehat{M_{ac}M_aM_c} + \widehat{M_cM_{ca}M_{cb}} \\
&\overset{5}{=} 90^\circ - \widehat{A} + \widehat{M_cM_{ca}M_{cb}} \\
&\overset{6}{=} 90^\circ - \widehat{A} + \widehat{M_{cb}CM_c} \\
&= 90^\circ - \widehat{A} + \widehat{ACM_c}
\end{aligned}$$

(1 – din $M_bM_c \parallel CB$, 2 – $M_bM_cM_{bc}M_{cb}$ inscriptibil, 3 – $M_{ac}M_{ca}M_{cb}M_{bc}$ inscriptibil, 4 – $M_{ac}M_{ca}M_aM_c$ inscriptibil, 5 – $M_aM_{ac}M_c$ triunghi dreptunghic, 6 – $M_cM_{ca}CM_{cb}$ inscriptibil). Reţinem termenii extremi şi obţinem: $\widehat{ACM_c} = \widehat{A} + \widehat{C} - 90°$, adică $\widehat{ACM_c} = 90° - \widehat{B}$. Analog, avem: $\widehat{BCM_c} = 90° - \widehat{A}$.

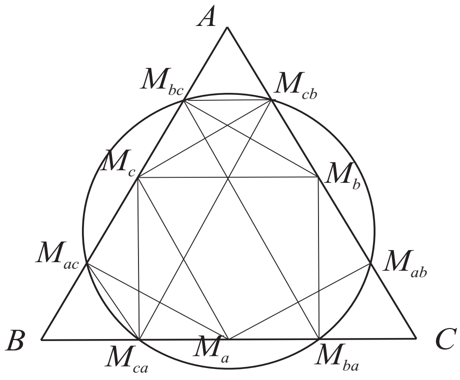

Fig. 1

Aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile ACM_c şi BCM_c, avem:

$$\frac{AM_c}{\sin(90° - B)} = \frac{CM_c}{\sin A}$$

şi

$$\frac{BM_c}{\sin(90° - A)} = \frac{CM_c}{\sin B},$$

de unde, ţinând seama că $AM_c = BM_c$, obţinem: $\sin 2A = \sin 2B$, deci $A = B$. sau $a = b$. Similar, se obţine şi $b = c$. Deci ABC este triunghi echilateral.

Propoziţia 5. *Dacă proiecţiile punctelor de contact ale cercului înscris pe celelalte două laturi ale triunghiului sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Notăm proiecţiile punctelor de contact I_a, I_b, I_c după cum se vede în Fig. 2 (I_a se proiectează în $I_{ab} \in AC$ şi $I_{ac} \in AB$ etc). Formal, se trece de la Fig. 1 la Fig. 2 prin înlocuirea literii M cu litera I şi păstrarea indicilor. Ca şi în Propoziţia 1, vom stabili o legătură utilă între unghiuri, care să ducă la rezolvarea problemei; urmăm aceeaşi cale, dar nu vom explica paşii făcuţi. Avem:

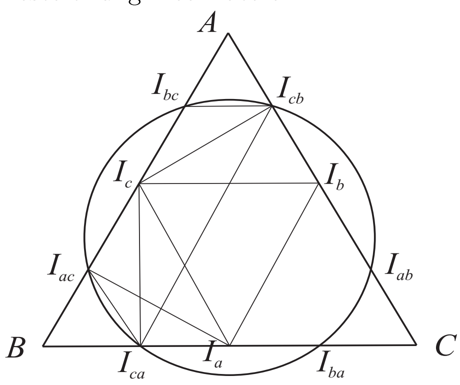

Fig. 2

$$\widehat{AI_bI_c} = \widehat{AI_{bc}I_{cb}} = \widehat{I_{ac}I_{ca}I_{cb}} = \widehat{I_{ac}I_{ca}I_c} + \widehat{I_cI_{ca}I_{cb}} = \widehat{I_{ac}I_aI_c} + \widehat{I_cI_{ca}I_{cb}} =$$
$$= \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{I_cI_{ca}I_{cb}} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{I_{cb}CI_c} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{ACI_c},$$

de unde obţinem: $\widehat{AI_bI_c} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{ACI_c}$ sau $90° - \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{ACI_c}$, ceea ce este echivalent cu $\widehat{ACI_c} = \frac{\widehat{C}}{2}$. Aşadar, CI_c este bisectoarea unghiului $\widehat{C}$. Similar, AI_a şi BI_b sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{B}$. Ca în Propoziţia 1, urmează că triunghiul ABC este echilateral.

Propoziţia 6. *Dacă proiecţiile picioarelor bisectoarelor pe celelalte două laturi ale triunghiului sunt conciclice, atunci triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstraţie. Semnificaţia notaţiilor din Fig. 3 este următoarea: L_a este piciorul bisectoarei unghiului $\widehat{A}$ şi L_{ab}, L_{ac} sunt proiecţiile acestui punct pe AC, respectiv AB, iar restul notaţiilor au semnificaţii asemănătoare. Procedăm ca în Propoziţiile 4 şi 5. Avem $\widehat{AL_bL_c} = \widehat{AL_{bc}L_{cb}} = \widehat{L_{ac}L_{ca}L_{cb}} = \widehat{L_{ac}L_{ca}L_c} + \widehat{L_cL_{ca}L_{cb}} = \widehat{L_{ac}L_aL_c} + \widehat{L_cL_{ca}L_{cb}} = 90^\circ - \widehat{BL_cL_a} + \widehat{L_cL_{ca}L_{cb}} = 90^\circ - \widehat{BL_cL_a} + \widehat{L_{cb}CL_c} = 90^\circ - \widehat{BL_cL_a} + \frac{\widehat{C}}{2}$, deci $\widehat{AL_bL_c} + \widehat{BL_cL_a} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{C}}{2}$. Similar vom obţine $\widehat{BL_cL_a} + \widehat{CL_aL_b} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{A}}{2}$ şi $\widehat{CL_aL_b} + \widehat{AL_bL_c} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{B}}{2}$. În consecinţă. $\widehat{AL_bL_c} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2}, \widehat{BL_cL_a} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{B}}{2}, \widehat{CL_aL_b} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{C}}{2}$. De aici deducem că $AL_b = AL_c, BL_c = BL_a$ şi $CL_a = CL_b$, relaţii echivalente cu faptul că punctele L_a, L_b, L_c sunt punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile respective. Conform Propoziţiei 1, triunghiul ABC este echilateral.

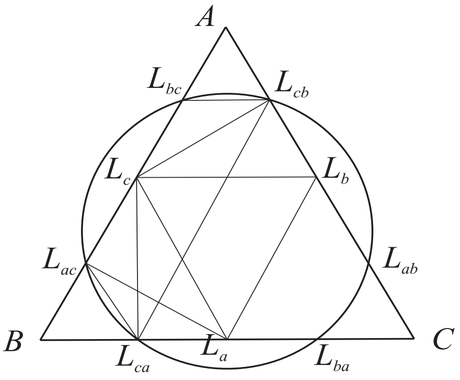

Fig. 3

Observaţie. Condiţia de conciclicitate este impusă unui număr de şase puncte situate pe laturile unui triunghi, câte două pe fiecare latură. În această Notă, au fost indicate două modalităţi de a ne procura aceste puncte, dar se pot imagina şi alte procedee în acest sens. Condiţiile restrictive în care am lucrat au impus triunghiului să fie, *în general*, echilateral (cercul lui Euler şi cercul lui Taylor fiind excepţii). În cap. VII din [**1**],*Cercurile lui Tucker,* se găsesc rezultate importante şi frumoase în această ordine de idei.

Încheiem cu următoarea

Problemă propusă. *Fie dat un triunghi ABC şi punctele $X \in (BC), Y \in (CA), Z \in (AB)$. Notăm proiecţia punctului X paralelă cu AC pe latura AB cu X_c (adică $X_c \in AB$ şi $XX_c \parallel AC$), iar proiecţia lui X paralelă cu AB pe latura AC cu X_b; analog se introduc punctele Y_a şi Y_c, Z_b şi Z_a. Arătaţi că în fiecare dintre cazurile:*

a) X, Y, Z sunt picioarele înălţimilor;
b) X, Y, Z sunt picioarele bisectoarelor;
c) X, Y, Z sunt punctele de contact ale cercului înscris;
d) X, Y, Z sunt punctele de contact ale cercurilor exînscrise

condiţia de conciclicitate a punctelor $X_c, X_b, Y_a, Y_c, Z_b, Z_a$ implică faptul că triunghiul este echilateral.

Bibliografie

1. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.