Procedeu de demonstrare a unor inegalităţi bazat pe inegalitatea lui Schur

Andi Gabriel BROJBEANU [1]

Abstract. A method for establishing certain inequalities is proposed and applied. It is based upon inequalities (1)-(9) that are consequences of Schur′s inequality (S).
Keywords: inequality, Schur′s inequality.
MSC 2010: 97H30.

În cadrul acestei Note vom prezenta un procedeu de demonstrare a unor inegalităţi, bazat pe inegalitatea lui Schur, care constă în utilizarea inegalităţilor (1)-(9) de mai jos, relativ la primele trei polinoame simetrice fundamentale. Este de precizat că acest procedeu nu-i întotdeauna optim sau cel mai elegant, dar se poate dovedi util în situaţii în care alte metode sau procedee de rezolvare sunt mai greu de găsit.

Începem prin a aminti următorul rezultat, de altfel punctul de plecare al Notei de faţă:

Inegalitatea lui Schur. *Dacă x, y, z sunt numere reale nenegative, atunci pentru orice $t \geq 0$ avem*:

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0, \tag{S}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x = y = z$ sau dacă două dintre numerele x, y, z sunt egale şi al treilea este nul; *dacă $xyz = 0$, impunem restricţia $t > 0$.*

Propoziţie. *Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive şi notăm $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx, r = xyz$, atunci au loc inegalităţile:*

$$p^2 \geq 3q, \tag{1}$$
$$q^2 \geq 3pr, \tag{2}$$
$$pq \geq 9r, \tag{3}$$
$$p^3 \geq 27r, \tag{4}$$
$$q^3 \geq 27r^2, \tag{5}$$
$$p^3 + 9r \geq 4pq, \tag{6}$$
$$2p^3 + 9r \geq 7pq, \tag{7}$$
$$q^3 + 9r^2 \geq 4pqr, \tag{8}$$
$$p^4 + 4q^2 + 6pr \geq 5p^2q, \tag{9}$$

[1] Elev, cl. a XI-a, Colegiul Naţional „C. Carabella", Târgovişte; e-mail: *andi_bro@yahoo.com*

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z$.

Demonstraţie. (1) Pentru $t = 0$, (S) devine $(x-y)(x-z)+(y-x)(y-z)+(z-x)(z-y) \geq 0$, adică $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, de unde

$$p^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx) = 3q.$$

(2) Ţinând cont de (1), obţinem:

$$q^2 = (xy+yz+zx)^2 \geq 3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy) = 3xyz(x+y+z) = 3pr.$$

(3) Se obţine înmulţind membru cu membru inegalităţile (1) şi (2).

(4) Se înmulţesc inegalităţile (1) şi (3) membru cu membru.

(5) Se înmulţesc membru cu membru inegalităţile (2) şi (3).

(6) Pentru $t = 1$, (S) devine $x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y) \geq 0$, adică $x^3+y^3+z^3+3xyz \geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$.

Cum $x^3+y^3+z^3 = 3xyz+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, obţinem:

$$\begin{aligned}
p^3+9r = (x+y+z)^3+9xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\
&\quad + 3xyz + +3(x+y+z)(xy+yz+zx)+6xyz \\
&= x^3+y^3+z^3+3xyz+3(x+y+z)(xy+yz+zx)+ \\
&\quad + 3xyz \geq xy(x+y)+xyz+yz(y+z)+xyz \\
&\quad + zx(z+x)+xyz+3(x+y+z)(xy+yz+zx) \\
&= xy(x+y+z)+yz(x+y+z)+zx(x+y+z) \\
&\quad + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) = 4pq.
\end{aligned}$$

(7) Ţinând cont de (1) şi (6), obţinem:

$$2p^3+9r = p \cdot p^2 + (p^3+9r) \geq p \cdot 3q + 4pq = 3pq + 4pq = 7pq.$$

(8) Aplicând (6) pentru numerele reale pozitive $a = xy, b = yz, c = zx$, avem:

$$q^3+9r^2 = (a+b+c)^3+9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca) = 4pqr.$$

(9) Pentru $t = 2$, (S) devine $x^2(x-y)(x-z)+y^2(y-x)(y-z)+z^2(z-x)(z-y) \geq 0$, adică $x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geq xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)$.

Cum $x^4+y^4+z^4 = (x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) = (p^2-2q)^2-2(q^2-2pr) = p^4+2q^2+4pr-4p^2q$, obţinem:

$$\begin{aligned}
p^4+4q^2+6pr &= x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)+4p^2q+2q^2+pr \\
&\geq 4p^2q+2q^2+pr+ +xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2) \\
&\quad + zx(z^2+x^2) = 4p^2q+2q^2+pr+(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)- \\
&\quad - x^2yz-xy^2z-xyz^2 = 4p^2q+2q^2+pr-pr+q(p^2-2q) \\
&= 4p^2q+q(p^2-2q+2q) = 5p^2q.
\end{aligned}$$

În continuare, vom prezenta câteva inegalităţi preluate din diferite surse, care vor fi demonstrate utilizând inegalităţile din propoziţia precedentă.

Problema 1. *Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2(xy + yz + zx)$. Arătaţi că $9xyz \geq x + y + z$.*

Marius Stănean, forumul MathTime

Demonstraţie. Folosind (6) şi condiţia din enunţ, obţinem că:

$$9xyz = 9r \geq 4pq - p^3 = p\Big[4(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)\Big] =$$
$$= p\Big[2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)\Big] = p = x + y + z.$$

Problema 2. *Fie $x, y, z \geq 0$ astfel încât $xy + yz + zx = 3$. Arătaţi că $4xyz(x + y + z) - 3xyz \leq 9$.*

Marius Stănean, forumul MathTime

Demonstraţie. Dacă $xyz = 0$, inegalitatea este evidentă. Dacă $x, y, z > 0$, atunci din (5) şi condiţia din enunţ rezultă că $27r^2 \leq q^3 = 27 \Rightarrow r^2 \leq 1 \Rightarrow r \leq 1 \Rightarrow r^2 \leq r$. Conform cu (8), avem:

$$4xyz(x + y + z) - 3xyz \leq 4pr - 3r^2 = \frac{1}{3}(4pqr - 9r^2) \leq \frac{1}{3}q^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9.$$

Problema 3. *Fie x, y, z trei numere reale pozitive cu $x + y + z = 3$. Să se arate că*

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \geq x^2 + y^2 + z^2 + 3.$$

Romeo Raicu, G.M.B. 7-8-9/2011

Demonstraţie. Avem $p = x + y + z = 3$, deci

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - x^2 - y^2 - z^2 - 3 = 2[3r + p(p^2 - 3q)] - (p^2 - 2q) - 3 = 6r + 2p^3 -$$
$$- 6pq - \frac{1}{3}p(p^2 - 2q) - \frac{1}{9}p^3 = \frac{14}{9}p^3 + 6r - \frac{16}{3}pq = \frac{8}{9}p(p^2 - 3q) + \frac{2}{3}(p^3 + 9r - 4pq) \geq 0,$$

conform cu cu (1) şi (6), deci inegalitatea este demonstrată.

Problema 4. *Fie x, y, z numere reale pozitive cu proprietatea că $xy + yz + zx = 3$. Să se arate că $3xyz(x + y + z) - 2xyz \leq 7$.*

Marian Cucoaneş, G.M. 4/2013

Demonstraţie. Trebuie să demonstrăm că $3pr \leq 7 + 2r$.

Conform (5) şi (8), rezultă $3pr = \frac{1}{4} \cdot 4pqr \leq \frac{1}{4}(q^3 + 9r^2) = \frac{1}{4}(27 + r^2 + 8r^2) \leq \frac{1}{4}(27 + \frac{1}{27}q^3 + 8r\sqrt{\frac{1}{27}q^3}) = \frac{1}{4}(28 + 8r) = 7 + 2r$, ceea ce încheie demonstraţia.

Problema 5. *Fie $a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $2(\tan a + \tan b + \tan c) = 3 \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c$.*

a) Arătaţi că $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c \geq 1$.

b) Aflaţi valoarea minimă a expresiei $\dfrac{1}{\sin^2 a}+\dfrac{1}{\sin^2 b}+\dfrac{1}{\sin^2 c}$.

Shortlist 2013

Demonstraţie. Notăm $x=\tan a, y=\tan b, z=\tan c$. Cum $a,b,c\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, avem că $x,y,z>0$. Rezultă că $\cos^2 a=\dfrac{1}{1+x^2}, \cos^2 b=\dfrac{1}{1+y^2}, \cos^2 c=\dfrac{1}{1+z^2}$.

a) $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c-1=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}-1=$

$$=\frac{3+2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2}-1=\frac{2+x^2+y^2+z^2-x^2y^2z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}.$$

Dar $2+x^2+y^2+z^2-x^2y^2z^2=2+p^2-2q-r^2=p^2-2q+\dfrac{3r}{p}-\dfrac{4}{9}p^2=\dfrac{1}{9p}(5p^3+27r-18pq)=\dfrac{2}{9}(p^2-3q)+\dfrac{1}{3p}(p^3+9r-4pq)\geq 0$, conform (1) şi (6), de unde $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c\geq 1$, cu egalitate pentru $x=y=z=\sqrt{2}$.

b) Demonstrăm că $\dfrac{1}{\sin^2 a}+\dfrac{1}{\sin^2 b}+\dfrac{1}{\sin^2 c}\geq\dfrac{9}{2}$:

$$\frac{1}{\sin^2 a}+\frac{1}{\sin^2 b}+\frac{1}{\sin^2 c}-\frac{9}{2}=\frac{1+x^2}{x^2}+\frac{1+y^2}{y^2}+\frac{1+z^2}{z^2}-\frac{9}{2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{3}{2}=$$
$$=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x^2y^2z^2}-\frac{3}{2}=\frac{q^2-2pr}{r^2}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{q^2}{pr}-3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{q^2-3pr}{pr}\geq 0,$$

conform cu (2), deci valoarea minimă este $\dfrac{9}{2}$ şi se atinge pentru $x=y=z=\sqrt{2}$.

Problema 6. *Numerele pozitive a,b,c verifică $abc=1$. Demonstraţi inegalitatea*

$$\sum\frac{a+b}{c}\geq 2(\sum a+\sum\frac{1}{a}-3)$$

Gabriel Dospinescu, Shortlist 2004

Demonstraţie. Facem decondiţionarea $a=\dfrac{x}{y}, b=\dfrac{y}{z}, c=\dfrac{z}{x}$. Avem:

$$\begin{aligned}\sum\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}{\frac{z}{x}}\geq 2(\sum\frac{x}{y}+\sum\frac{y}{x}-3)&\Leftrightarrow\sum\frac{x^2}{yz}+\sum\frac{xy}{z^2}+6\geq 2\sum\frac{x^2+y^2}{xy}\\
&\Leftrightarrow\frac{\sum x^3}{xyz}+\frac{\sum(xy)^3}{x^2y^2z^2}+6\geq 2\cdot\frac{\sum x\sum x^2-\sum x^3}{xyz}\\
&\Leftrightarrow 3\cdot\frac{3r+p^3-3pq}{r}+\frac{3r^2+q^3-3pqr}{r^2}+6\geq 2\cdot\frac{p(p^2-2q)}{r}\\
&\Leftrightarrow 18r^2+3p^3r+q^3-12pqr\geq 2p^3r-4pqr\\
&\Leftrightarrow(q^3+9r^2-4pqr)+r(p^3+9r-4pq)\geq 0,\end{aligned}$$

adevărat conform cu (6) şi (8).

Problema 7. *Demonstraţi că în orice triunghi*

$$\left(\frac{4R+r}{p}\right)^2+\frac{9r}{4R+r}\geq 4.$$

Cosmin Pohoaţă, Shortlist 2007

Demonstraţie. Fie r_a, r_b, r_c lungimile razelor cercurilor exînscrise corespunzătoare vârfurilor triunghiului ABC. Dacă $p_0=r_a+r_b+r_c, q_0=r_ar_b+r_br_c+r_cr_a, r_0=r_ar_br_c$, cu notaţiile cunoscute obţinem: $p_0=4R+r, q_0=p^2, r_0=p^2r$ (se folosesc formulele $r_a=\dfrac{S}{p-a}, r_b=\dfrac{S}{p-b}, r_c=\dfrac{S}{p-c}$).

Inegalitatea este echivalentă cu $\dfrac{{p_0}^2}{q_0}+9\dfrac{r_0}{p_0q_0}\geq 4 \Leftrightarrow p_0^3+9r_0\geq 4p_0q_0$, adevărat conform cu (6).

Problema 8. *Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c$=3. Arătaţi că*

$$abc+\frac{12}{ab+bc+ca}\geq 5.$$

forumul ArtofProblemSolving

Demonstraţie. Dacă $p=a+b+c=3, q=ab+bc+ca, r=abc$, atunci

$$abc+\frac{12}{a+b+c}-5=r+\frac{12}{q}-5=\frac{27r}{p^3}+\frac{4p^2}{3q}-5=\frac{4p^5+81qr-15p^3q}{p^3q}\geq 0,$$

deoarece $4p^5+81qr-15p^3q=9q(p^3+9r-4pq)+4(p^5-6p^3q+9pq^2)=4p(p^2-3q)^2+9q(p^3+9r-4pq)\geq 0$, conform cu (6).

Problema 9. *Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC. Să se arate că*

$$\frac{a^3}{b+c-a}+\frac{b^3}{c+a-b}+\frac{c^3}{a+b-c}\geq a^2+b^2+c^2$$

Nicolae Papacu, IMAC 2009

Demonstraţie. Decondiţionăm: $a=y+z, b=z+x, c=x+y$. Avem:

$$\sum\frac{a^3}{b+c-a}=\sum\frac{(y+z)^3}{2x}=\frac{\sum yz[y^3+z^3+3yz(p-x)]}{2r}=$$
$$=\frac{\sum x^3\sum xy-xyz\sum x^2+3p\sum y^2z^2-3r\sum yz}{2r}=\frac{3qr+p^3q-3pq^2-}{}$$
$$\frac{-p^2r+2qr+3pq^2-6p^2r-3qr}{2r}=\frac{p^3q-7p^2r+2qr}{2r},$$

deci inegalitatea este succesiv echivalentă cu $\dfrac{p^3q-7p^2r+2qr}{2r}\geq\sum(y+z)^2\Leftrightarrow p^3q-7p^2r+2qr\geq 4r(p^2-q)\Leftrightarrow p^3q+6qr\geq 11p^2r\Leftrightarrow q(p^3+9r-4pq)+\dfrac{11p}{3}(q^2-3pr)+\dfrac{q}{3}(pq-9r)\geq 0$, adevărat conform cu (2), (3) şi (6).

Problema 10. *Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive cu suma 1, atunci*

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2$$

Titu Andreescu şi Gabriel Dospinescu

Demonstraţie. Dacă $p = a+b+c = 1, q = ab+bc+ca, r = abc$, atunci inegalitatea se scrie:

$$\sum a^2 \sum a^2b^2 - a^2b^2c^2 \geq 8\left(\sum a^2b^2\right)^2 \Leftrightarrow \sum a^2b^2 \cdot$$
$$\cdot \left[\left(\sum a\right)^2 \sum a^2 - 8\sum a^2b^2\right] \geq a^2b^2c^2\left(\sum a\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (q^2-2pr)(p^4-2p^2q-8q^2+16pr) \geq p^2r^2$$

Dar, conform cu (2) şi (9), avem $(q^2-2pr)(p^4-2p^2q-8q^2+16pr) \geq pr(5p^2q - 4q^2 - 2p^2q - 8q^2 + 10pr) \geq pr[pr + 3(p^2q + 3pr - 4q^2)] \geq p^2r^2$, deoarece $p^2q+3pr-4q^2 = (x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)+3xyz(x+y+z)-2(xy+yz+zx)^2 = (x^3y+y^3x-2x^2y^2)+(y^3z+z^3y-2y^2z^2)+(z^3x+x^3z-2x^2z^2) = xy(x-y)^2+yz(y-z)^2+zx(z-x)^2 \geq 0$. Aşadar, inegalitatea este demonstrată.

Problema 11. *Fie $a, b, c > 0$. Arătaţi că*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)}.$$

Andi Gabriel Brojbeanu

Demonstraţie. Dacă $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$, atunci

$$\frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)} - \sum \frac{1}{a+b} = \frac{3p}{2q} - \frac{\sum(a^2+ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{3p}{2q} - \frac{p^2+q}{pq-r} =$$
$$= \frac{3p^2q - 3pr - 2p^2q - 2q^2}{2p(pq-r)} = \frac{\frac{2q}{3}(p^2-3q) + \frac{p}{3}(pq-9r)}{2(pq-r)} \geq 0,$$

adevărat conform cu (1) şi (3).

Propunem cititorilor interesaţi să procedeze în acelaşi fel cu inegalităţile:

1. Fie a, b, c numere reale pozitive. Arătaţi că $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$. (*Mircea Lascu*)

2. Să se arate că $5(a^2+b^2+c^2) \leq 6(a^3+b^3+c^3)+1$, pentru orice numere reale nenegative care satisfac relaţia $a+b+c=1$.

(*Mihai Piticari şi Dan Popescu, Shortlist 2002*)

3. Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=1$. Arătaţi că $\dfrac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)} \geq 8$. (*forumul ArtofProblemSolving*)

4. Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea $\dfrac{3(r_a+r_b+r_c)}{2p^2} \geq \dfrac{1}{r_a+r_b}+\dfrac{1}{r_b+r_c}+\dfrac{1}{r_c+r_a} \geq \dfrac{6}{5R+2r}$.(*Andi Gabriel Brojbeanu, Recreaţii Matematice 1/2014*)

5. Fie $a,b,c>0$ cu $a+b+c=1$. Să se arate că $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+3(ab+bc+ca) \geq \dfrac{11}{2}$. (*Gh. Ghiţă, G.M.B. 7-8-9/2009*)

6. Se consideră a,b,c trei numere reale strict pozitive. Să se arate că $\sum \dfrac{b+c}{a} \geq 3+\dfrac{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}{abc(a+b+c)}$. (*Cezar Lupu, Shortlist 2006*)

7. Să se arate că dacă a,b,c sunt numere reale pozitive cu proprietatea că $abc=1$, atunci $(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geq 2\left(1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)$. (*Dan Nedeianu, Shortlist 2010*)

8. Arătaţi că pentru orice $a,b,c>0$ avem $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}+\dfrac{b^2+c^2}{b+c}+\dfrac{c^2+a^2}{c+a} \leq \dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$. (*Ngueyen le Dung*)

9. Fie a,b,c trei numere reale strict pozitive astfel încât $a+b+c \geq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Să se arate că $a+b+c \geq \dfrac{3}{a+b+c}+\dfrac{2}{abc}$.
(*Cezar Lupu şi Valentin Vornicu, Shortlist 2006*)

10. Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $abc=1$. Arătaţi că $5+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geq (a+1)(b+1)(c+1)$. (*forumul ArtofProblemSolving*)

11. Dacă x,y,z sunt numere reale pozitive, atunci $\dfrac{1}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{1}{y^2+yz+z^2}+\dfrac{1}{z^2+zx+x^2} \geq \dfrac{9}{(x+y+z)^2}$. (*Vasile Cîrtoaje, G.M.B.*)

Bibliografie

1. **T. Ceauşu, A.C. Muntean, I. Stana** – *Echivalenţa unor inegalităţi clasice*, Editura Mirton, Timişoara, 2007.
2. **T. Andreescu, V. Cârtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu** – *Old* & *new inequalities*, Editura Gil, Zalău, 2004.
3. **B. Ioniţă, T. Zvonaru** – *Aplicaţii ale inegalităţii lui Schur*, Pregătirea concursului Internaţional de Matematică ,,Arhimede" - IMAC, Clasele III-XII, Editura Nomina, 2011.
4. – *Colecţia Shortlist 2002-2013.*