NOTA ELEVULUI

Caracterizarea unor proprietăţi de perpendicularitate în care sunt implicate punctele O, I, H, G, O_9

Andi Gabriel BROJBEANU[1]

Abstract. In this Note, a couple of conditions of perpendicularity for some lines determined by the vertices of a nonisosceles triangle and the points O, I, H, G, O_9 (the center of the nine point circle) are characterized. The obtained results are formulated in Propositions 1-4.

Keywords: circumcenter, incenter, orthocenter, centroid, the nine point circle.

MSC 2010: 51M04.

În această Notă avem în vedere numai triunghiuri neisoscele. Pentru un triunghi ABC de acest fel, punctele O, I, H, G şi O_9 (centrul cercului celor nouă puncte) sunt distincte.

Amintim că punctele O, H, G, O_9 sunt coliniare, iar dreapta pe care se află se numeşte *dreapta lui Euler*. Se ştie că punctul I aparţine dreptei lui Euler a unui triunghi dacă şi numai dacă triunghiul este isoscel. Aşadar, în condiţia convenită, punctul I nu aparţine dreptei lui Euler a triunghiului. Mai amintim că $HG = 2OG$ şi că O_9 este mijlocul segmentului HO (a se vedea, de exemplu, [**1**, **2**]).

Între elementele unui triunghi au loc următoarele egalităţi binecunoscute:

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr, \tag{1}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr), \tag{2}$$

$$abc = 4Rrp. \tag{3}$$

Pentru distanţele între punctele O, I, H, G, O_9 au loc formulele:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \ (Euler), \tag{4}$$

$$OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2, \tag{5}$$

$$IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2, \tag{6}$$

$$IG^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr), \tag{7}$$

$$IO_9 = \frac{1}{2}(R - 2r). \tag{8}$$

Formula (8) se demonstrează în mod obişnuit utilizând teorema medianei în $\triangle IOH$ relativ la IO_9.

Vom folosi ca instrument de lucru următoarea

[1] Elev, cl. a X-a, Colegiul Naţional ,,Constantin Carabella", Târgovişte

Lemă. *Fie A, B, C, D patru puncte oarecare în plan. Atunci*

$$AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Acest rezultat se stabileşte uşor cu teorema lui Pitagora şi poate fi privit ca o extindere a acesteia (la care se reduce dacă unul dintre punctele C sau D coincide cu unul dintre A sau B).

Propoziţia 1. *Într-un triunghi ABC neisoscel, avem*:
1) $IO_9 \perp BC \Leftrightarrow 2a = b + c$;
2) $IG \perp BC \Leftrightarrow 3a = b + c$.

Demonstraţie. 1) Conform Lemei, avem:

$$IO_9 \perp BC \Leftrightarrow IB^2 + O_9C^2 = IC^2 + O_9B.$$

Aplicând de două ori teorema bisectoarei, se obţin relaţiile:

$$IB^2 = \frac{ac(p-b)}{p}, \qquad IC^2 = \frac{ab(p-c)}{p}.$$

Pentru calculul termenilor O_9B şi O_9C vom utiliza teorema medianei. Ca urmare,

$$\begin{aligned} IO_9 \perp BC \Leftrightarrow & \frac{ac(p-b)}{p} + \frac{R^2 + CH^2}{2} - \frac{OH^2}{4} = \frac{ab(p-c)}{p} + \frac{R^2 + BH^2}{2} - \frac{OH^2}{4} \\ & \Leftrightarrow BH^2 - CH^2 = \frac{2a}{p}[c(p-b) - b(p-c)] \\ & \Leftrightarrow BD^2 - CD^2 = 2a(c-b) \\ & \Leftrightarrow c^2 - b^2 = 2a(c-b) \\ & \Leftrightarrow 2a = b + c. \end{aligned}$$

(D notează piciorul înălţimii coborâte din vârful A).

2) Avem:

$$\begin{aligned} IG \perp BC & \Leftrightarrow IB^2 + GC^2 = IC^2 + GB^2 \\ & \Leftrightarrow \frac{ac(p-b)}{p} + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \frac{ab(p-c)}{p} + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 \\ & \Leftrightarrow ac + \frac{2}{9}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right) = ab + \frac{2}{9}(c^2 + a^2 - \frac{b^2}{2}) \\ & \Leftrightarrow a(b-c) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2}(b^2 - c^2) \\ & \Leftrightarrow 3a = b + c \end{aligned}$$

(m_b, m_c notează lungimile medianelor din B, respectiv C).

Propoziţia 2. *Într-un triunghi ABC neisoscel este adevărată afirmaţia*:

$$IO_9 \perp IG \Leftrightarrow 2a = b + c \text{ sau } 2b = c + a \text{ sau } 2c = a + b.$$

Demonstraţie. Conform teoremei lui Pitagora,

$$IO_9 \perp IG \Leftrightarrow IO_9^2 + IG^2 = O_9G^2.$$

Ţinând seama de formulele (5), (7), (8) şi faptul că $O_9G = O_9O - OG = \frac{1}{2}HO - \frac{1}{3}HO = \frac{1}{6}HO$, rezultă că

$$\begin{aligned} IO_9 \perp IG &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(R-2r)^2 + \frac{1}{9}(p^2+5r^2-16Rr) = \frac{1}{36}(9R^2+8Rr+2r^2-2p^2) \\ &\Leftrightarrow 9r^2 - 18Rr + p^2 = 0. \end{aligned}$$

Prin calcul şi utilizând formulele (1) şi (3), avem:

$$\begin{aligned} (2p-3a)(2p-3b)(2p-3c) &= 8p^3 - 12p^2(a+b+c) + 18p(ab+bc+ca) - 27abc = \\ &= 8p^3 - 24p^3 + 18p(p^2+r^2+4Rr) - 27\cdot 4Rrp = \\ &= 2p(9r^2 - 18Rr + p^2). \end{aligned}$$

Combinând rezultatele precedente, vom obţine:

$$\begin{aligned} IO_9 \perp IG &\Leftrightarrow (2p-3a)(2p-3b)(2p-3c) = 0 \\ &\Leftrightarrow (b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a = b+c \ \text{ sau } \ 2b = c+a \ \text{ sau } \ 2c = a+b. \end{aligned}$$

Propoziţia 3. *Într-un triunghi ABC neisoscel sunt adevărate afirmaţiile:*
1) $IO \perp AG \Leftrightarrow 2bc = ca + ab$,
2) $IO_9 \perp AG \Leftrightarrow 2(b-c)^2 = (c-a)^2 + (a-b)^2$.
Demonstraţie. 1) Utilizând din nou Lema, avem:

$$\begin{aligned} IO \perp AG &\Leftrightarrow IA^2 + OG^2 = IG^2 + OA^2 \Leftrightarrow IA^2 + \frac{1}{9}OH^2 = IG^2 + R^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{bc(p-a)}{p} + \frac{1}{9}(9R^2+8Rr+2r^2-2p^2) = \frac{1}{9}(p^2+5r^2-16Rr) + R^2 \\ &\Leftrightarrow bc - 4Rr + \frac{1}{9}(9R^2+24Rr-3r^2-3p^2) = R^2 \\ &\Leftrightarrow 3bc = p^2 + r^2 + 4Rr \\ &\Leftrightarrow 3bc = ab + bc + ca \\ &\Leftrightarrow 2bc = ca + ab. \end{aligned}$$

2) Notăm cu A_1 mijlocul laturii BC. Atunci,

$$\begin{aligned} IO_9 \perp AG &\Leftrightarrow IO_9 \perp AA_1 \Leftrightarrow IA^2 + O_9A_1^2 = IA_1^2 + O_9A^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{bc(p-a)}{p} + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{IB^2+IC^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) + \frac{AH^2+AO^2}{2} - \frac{OH^2}{4}. \end{aligned}$$

Cum $AH = 2R\cos A$, obţinem că $AH^2 = 4R^2\cos^2 A = 4R^2(1-\sin^2 A) = 4R^2 - a^2$. Ţinând seama de (5), (3) şi (2), avem:

$$\begin{aligned}
IO_9 \perp AG \Leftrightarrow \frac{bc(p-a)}{p} + \frac{R^2}{4} &= \frac{ac(p-b)+ab(p-c)}{2p} - \frac{a^2}{4} + \frac{5R^2-a^2}{2} - \frac{OH^2}{4}\\
\Leftrightarrow bc - 4Rr + \frac{R^2}{4} &= \frac{ac+ab}{2} - 4Rr - \frac{a^2}{4} + \frac{5R^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{9R^2+8Rr+2r^2-2p^2}{4}\\
\Leftrightarrow 4bc &= 2ac + 2ab - 3a^2 + 2(p^2 - r^2 - 4Rr)\\
\Leftrightarrow 4bc &= 2ac + 2ab - 3a^2 + (a^2+b^2+c^2)\\
\Leftrightarrow 2(b^2+c^2-2bc) &= (a^2+c^2-2ac) + (a^2+b^2-2ab)\\
\Leftrightarrow 2(b-c)^2 &= (c-a)^2 + (a-b)^2.
\end{aligned}$$

Propoziţia 4. *Într-un triunghi ABC neisoscel avem*

$$IO \perp AI \Leftrightarrow bc = 6Rr.$$

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
IO \perp AI &\Leftrightarrow IO^2 + IA^2 = OA^2\\
&\Leftrightarrow R^2 - 2Rr + \frac{bc(p-a)}{p} = R^2\\
&\Leftrightarrow -2Rr + bc - 4Rr = 0\\
&\Leftrightarrow bc = 6Rr.
\end{aligned}$$

Procedând în acelaşi mod, se pot găsi şi alte rezultate de acest fel. Nu întotdeauna proprietatea geometrică se caracterizează cu o condiţie de formă simetrică, simplă.

Propunem spre verificare următoarele afirmaţii:

1. $IH \perp AG \Leftrightarrow (b-c)^2 = a(2a-b-c)$;
2. $IO \perp AI \Leftrightarrow 6Rr = bc \Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2} = 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Bibliografie

1. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, Bucureşti, 1958.
2. **D. Sachelarie** – *Geometria triunghiului. Anul 2000*, Matrix Rom, Bucureşti, 2000.