NOTA ELEVULUI

O dublă inegalitate integrală şi câteva aplicaţii

Răzvan-Dumitru CEUCĂ[1]

Abstract. The aim of this Note consists in establishing the inequalities (1). A couple of their consequences and applications are also given.

Keywords: Cauchy-Buniakovski-Schwarz inequality, Bergström's inequality.

MSC 2010: 26D15.

Scopul acestei Note este stabilirea următorului rezultat:

Teoremă. *Dacă funcţiile* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *şi* $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ *sunt continue, atunci au loc inegalităţile:*

$$(1)\qquad \int_a^b \left[\frac{f^2(t)}{\varphi(t)} + \frac{g^2(t)}{\psi(t)}\right] dt \geq \frac{\left[\int_a^b f(t)dt\right]^2}{\int_a^b \varphi(t)dt} + \frac{\left[\int_a^b g(t)dt\right]^2}{\int_a^b \psi(t)dt} \geq \frac{\left[\int_a^b (f(t)+g(t))dt\right]^2}{\int_a^b [\varphi(t)+\psi(t)]dt}.$$

Egalităţile sunt atinse dacă şi numai dacă $f = k_1\varphi$, $g = k_2\psi$ *cu* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Pentru a dovedi prima inegalitate este suficient să arătăm că

$$(2)\qquad \int_a^b \frac{f^2(t)}{\varphi(t)}dt \geq \frac{[\int_a^b f(t)dt]^2}{\int_a^b \varphi(t)dt} \quad \text{şi} \quad \int_a^b \frac{g^2(t)}{\psi(t)}dt \geq \frac{[\int_a^b g(t)dt]^2}{\int_a^b \psi(t)dt}.$$

Punem prima dintre inegalităţile (2) sub forma

$$(3)\qquad \int_a^b \frac{f^2(t)}{\varphi(t)}dt \cdot \int_a^b \varphi(t)dt \geq \left[\int_a^b f(t)dt\right]^2$$

şi observăm că aceasta din urmă este adevărată conform *inegalitaţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz*, forma integrală. La fel procedăm pentru a dovedi a doua inegalitate din (2).

Pentru a dovedi a doua inegalitate din (1), vom utliza inegalitatea

$$(4)\qquad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} \geq \frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$$

(T. Andreescu, R.M.T., 1979), care este un caz particular al *inegalităţii lui Bergström*. Egalitatea în (4) se atinge dacă şi numai dacă $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta}$.

Într-adevăr, luând în (4) $x = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$, $y = \displaystyle\int_a^b g(t)dt$, $\alpha = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt > 0$ şi $\beta = \displaystyle\int_a^b \psi(t)dt > 0$ obţinem partea din dreapta a inegalităţilor (1).

[1] Elev, cl. a XII-a, Colegiul Naţional, Iaşi

În sfârşit, afirmaţia relativ la cazul de egalitate în (1) rezultă imediat din condiţiile în care în (3) şi (4) avem egalitate. Teorema este complet demonstrată.

Corolar 1. *Dacă funcţiile* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ *sunt continue, atunci*

$$\int_a^b \frac{f^3(t) + g^3(t)}{f(t) \cdot g(t)} dt \geq \frac{\left[\int_a^b f(t)dt\right]^3 + \left[\int_a^b g(t)dt\right]^3}{\int_a^b f(t)dt \cdot \int_a^b g(t)dt} \geq \int_a^b [f(t) + g(t)]dt, \tag{5}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $f = kg$, $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstraţie. În (1) luăm $\varphi = g$ şi $\psi = f$.

Exemplul 1. *Arătaţi că* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^3 x + e^{3x}}{e^x \operatorname{arctg} x} dx \geq \frac{\pi}{4} + e - \ln\sqrt{2} - 1.$

Utilizând (5), avem:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^3 x - e^{3x}}{e^x \operatorname{arctg} x} dx \geq \int_0^1 (\operatorname{arctg} x + e^x) dx = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\, dx}{1 + x^2} +$$

$$+ e^x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + e - 1 - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + e - \ln\sqrt{2} - 1.$$

Corolar 2. *Dacă funcţiile* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ *sunt continue, atunci*

$$\int_a^b \left[f^2(t) \cdot g(t) + \frac{1}{f(t) \cdot g^2(t)}\right] dt \geq \int_a^b \left[f(t) + \frac{1}{g(t)}\right] dt, \tag{6}$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $f \cdot g = 1$.

Demonstraţie. În (1), din care se omite membrul din mijloc, luăm ca funcţii f, g, φ, ψ funcţiile $f, \dfrac{1}{g}, \dfrac{1}{g}$, respectiv f.

Exemplul 2. *Arătaţi că* $\displaystyle\int_1^e \left(xe^{2x} + \frac{1}{x^2 e^x}\right) dx \geq e^e - e + 1.$

Avem: $\displaystyle\int_1^e \left(xe^{2x} + \frac{1}{x^2 e^x}\right) dx \geq \int_1^e \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx = e^e - e + 1.$

În final, propunem următoarele exerciţii ($f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, $0 < a < b$):

1) $\displaystyle\int_a^b \frac{f^2(x) + g^2(x)}{x} dx \geq \frac{1}{b^2 - a^2} \left[\int_a^b (f(x) + g(x))dx\right]^2;$

2) $\displaystyle\int_a^b x[f^2(x) + g^2(x)]dx \geq \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}} \left[\int_a^b (f(x) + g(x))dx\right]^2.$

Bibliografie

1. **M. Becheanu, B. Enescu** – *Inegalităţi elementare ... şi mai puţin elementare*, Ed. Gil, Zalău, 2002.
2. **D. Drăcea, L. Niculescu, I. Pătraşcu, D. Seclăman** – *Matematica. Manual pentru clasa a XII-a*, Ed. Cardinal, Craiova, 2007.