Asupra unei inegalităţi "aproape clasică"

Dan Dănăilă[1]

Abstract. In this note we present two inequalities of Cauchy-Buniakovsky-Schwarz type and some of their consequences.

Keywords: Cauchy-Buniakovski-Schwarz, cardinal number, matrix.

MSC 2000: 26D15.

Vom prezenta două inegalităţi de tip Cauchy-Buniakovski-Schwarz şi câteva aplicaţii ale lor.

Propoziţie. *Fie numerele* $m, n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}_+$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{R}$ *şi mulţimile finite* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$. *Au loc inegalităţile:*

(1) $\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\min(a_i, b_j)x_iy_j\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{1\leq i,j\leq m}\min(a_i, a_j)x_ix_j\right)\left(\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}\min(b_i, b_j)y_iy_j\right)$;

(2) $\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|A_i \cap B_j\right|x_iy_j\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i,j=1}^{m}\left|A_i \cap A_j\right|x_ix_j\right)\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left|B_i \cap B_j\right|y_iy_j\right)$.

Demonstraţie. (1) Fie mulţimea $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, cu $0 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_r$, $l_1 = c_1, l_2 = c_2 - c_1, l_3 = c_3 - c_2, \ldots, l_r = c_r - c_{r-1}$ şi matricea $D = diag(\sqrt{l_1}, \sqrt{l_2}, \ldots, \sqrt{l_r})$. Fie vectorii $d_i = (d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{ir})$ şi $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ir})$, definiţi prin $d_{ij} = \begin{cases}1, & a_i \geq c_j\\ 0, & a_i < c_j\end{cases}$ şi $e_{ij} = \begin{cases}1, & b_i \geq c_j\\ 0, & b_i < c_j\end{cases}$, şi vectorii $d'_i = x_id_iD$, $e'_i = y_ie_iD$. Cu aceste notaţii, inegalitatea (1) se rescrie astfel:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d'_i\,{}^te'_j\right)^2 \leq \left(\sum_{1\leq i,j\leq m}d'_i\,{}^td'_j\right)\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}e'_i\,{}^te'_j\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\sum_{i=1}^{m}d'_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}{}^te'_j\right)\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{m}d'_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m}{}^td'_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}e'_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}{}^te'_i\right).$$

Dacă notăm cu $u = \sum\limits_{i=1}^{m}d'_i$ şi $v = \sum\limits_{i=1}^{n}e'_i$, inegalitatea devine:

$$(u\,{}^tv)^2 \leq (u\,{}^tu)(v\,{}^tv) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{r}u_iv_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{r}u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{r}v_i^2\right).$$

Observând că am ajuns la inegalitatea CBS aplicată numerelor $u_1, u_2, \ldots, u_r$ şi $v_1, v_2, \ldots, v_r$, demonstraţia se încheie.

(2) Fie mulţimea $C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, cu $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$. Considerăm vectorii $d_i = (d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{ir})$ şi $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ir})$, unde $d_{ik} =$

[1] Elev, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "V. Alecsandri", Galaţi

$\begin{cases} 1, & c_k \in A_i \\ 0, & c_k \notin A_i \end{cases}$ şi $e_{ik} = \begin{cases} 1, & c_k \in B_i \\ 0, & c_k \notin B_i \end{cases}$ şi $d_i' = x_i d_i$, $e_i' = y_i e_i$. Folosind aceste notaţii, inegalitatea se rescrie în forma

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_i'\, {}^t e_j'\right)^2 \leq \left(\sum_{1\leq i,j\leq m} d_i'\, {}^t d_j'\right)\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} e_i'\, {}^t e_j'\right),$$

cu care ne-am întâlnit mai sus. Continuând în acelaşi fel, deducem că (2) este adevărată.

Consecinţa 1. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ şi $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$. Atunci

$$\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(a_i a_j, 1) x_i y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(a_i, a_j) x_i x_j\right)\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(a_i, a_j) y_i y_j\right).$$

Demonstraţie. Considerăm $m = n$ şi şirurile $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, $b_1 = \dfrac{1}{a_1}$, $b_2 = \dfrac{1}{a_2}, \ldots, b_n = \dfrac{1}{a_n}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $y_1 a_1, y_2 a_2, \ldots, y_n a_n \in \mathbb{R}$. Aplicând inegalitatea (1), obţinem:

$$\left(\sum_{1,j=1}^{n} \min\left(a_i, \frac{1}{a_j}\right) x_i y_j a_j\right)^2 \leq \left(\sum_{1,j=1}^{n} \min(a_i, a_j) x_i x_j\right)\left(\sum_{1,j=1}^{n} \min\left(\frac{1}{a_i}, \frac{1}{a_j}\right) y_i y_j a_i a_j\right),$$

de unde rezultă imediat inegalitatea dorită.

Consecinţa 2. $\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(a_i a_j, 1) x_i x_j\right| \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(a_i, a_j) x_i x_j$ $\quad (a_i > 0$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n})$.

Consecinţa 3. Matricele $(\min(a_i, a_j))_{i,j=\overline{1,n}} \pm (\min(a_i a_j, 1))_{i,j=\overline{1,n}})$ sunt pozitiv semidefinite.

Demonstraţie. Se deduce din Consecinţa 2. Acesta este un rezultat important şi nebanal!

Consecinţa 4. $\sum_{i,j=1}^{n} \min(x_i x_j, y_i y_j) \leq \sum_{i,j=1}^{n} \min(x_i y_j, x_j y_i) (x_i, y_i \in \mathbb{R}_+,\ i = \overline{1,n})$. (*USAMO 2000*, **Gheorghe Zbăganu**).

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea putem considera $x_i, y_i \in \mathbb{R}_+^*$, $i = \overline{1,n}$. Aplicând inegalitatea (1) pentru $m = n$, $a_i = \dfrac{y_i}{x_i}$, $b_i = x_i y_i$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}_+^*$ $(i = \overline{1,n})$, obţinem

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} \min\left(\frac{y_i}{x_i}, \frac{x_j}{y_j}\right) x_i y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} \min\left(\frac{y_i}{x_i}, \frac{y_j}{x_j}\right) x_i x_j\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n} \min\left(\frac{x_i}{y_i}, \frac{x_j}{y_j}\right) y_i y_j\right),$$

de unde inegalitatea de demonstrat. Astfel am obţinut o rezolvare elegantă şi rapidă a cunoscutei şi dificilei inegalităţi propusă de Gheorghe Zbăganu la USAMO 2000.

Consecinţă 5. $\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(a_i,b_j)\right)^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n}\min(a_i,a_j)\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\min(b_i,b_j)\right)$, $a_1,a_2,\ldots,a_m\in\mathbb{R}_+^*$, $b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathbb{R}_+^*$ (**Don Zagier**). *Când are loc egalitatea?*

Demonstraţie. Dacă considerăm $m=n$, $a_i,b_i\in\mathbb{R}_+^*$, $x_i=y_i=1(i=\overline{1,n})$ şi aplicăm inegalitatea (1), obţinem inegalitatea lui Don Zagier.

Partea cea mai interesantă a inegalităţii este cazul de egalitate, care se stabileşte uşor apelând la demonstraţia dată pentru inegalitatea (1). Anume, folosind condiţiile în care avem egalitate în inegalitatea CBS, deducem că egalitatea are loc când $\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\ldots=\frac{u_r}{v_r}$; dar $u_1=v_1=n\sqrt{l_1}$, ceea ce implică că $u_i=v_i, i=\overline{1,n}$. Rezultă că în fiecare din şirurile $(a_i)_{i=\overline{1,n}}$ şi $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$, c_k apare de acelaşi număr de ori (c_k de $\frac{u_{k+1}}{\sqrt{l_{k+1}}}-\frac{u_k}{\sqrt{l_k}}$, $k=\overline{1,r-1}$ ori, iar c_r de $\frac{u_r}{\sqrt{l_r}}$ ori). Deci egalitatea are loc când şirul $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$ este o permutare a şirului $(a_i)_{i=\overline{1,n}}$.

Consecinţa 6. $\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|A_i\cap B_j|\right)^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{m}|A_i\cap A_j|\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}|B_i\cap B_j|\right)$, *unde* $n,m\in\mathbb{N}$ *şi* $A_1,A_2,\ldots,A_m,B_1,B_2,\ldots,B_n$ *sunt mulţimi finite.*

Demonstraţie. Se aplică inegalitatea (2) pentru mulţimile $A_1,A_2,\ldots,A_m$, $B_1,B_2,\ldots,B_n$ şi şirurile $x_1=x_2=\ldots=x_n=1, y_1=y_2=\ldots=y_m=1$ şi se obţine inegalitatea de mai sus.

Observaţie. Toate aceste inegalităţi se bazează pe aplicarea inegalităţii CBS într-un mod ingenios şi pe observarea faptului că sumele din dreapta sunt pozitive în ciuda faptului că $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ şi $y_1,y_2,\ldots,y_m\in\mathbb{R}$.

Premiu pe anul 2011 acordat de ASOCIAŢIA "RECREAŢII MATEMATICE"

Se acordă un premiu în bani în valoare de 200 lei elevului

DĂNĂILĂ Dan – Colegiul Naţional "V. Alecsandri", Galaţi

pentru nota *Asupra unei inegalităţi "aproape clasică"* apărută în acest număr al revistei *Recreaţii Matematice.*