NOTA ELEVULUI

Câteva proprietăţi caracteristice ale triunghiului isoscel

Răzvan CEUCĂ[1]

Abstract. Let P be the intersection point of the Cevian lines AA', BB', CC' in the triangle ABC. A couple of remarkable points of the triangle (denoted G, H, K, Γ, N) are identified, such that the congruence of two segments among $[PA']$, $[PB']$ and $[PC']$ implies the property of the triangle to be isosceles.

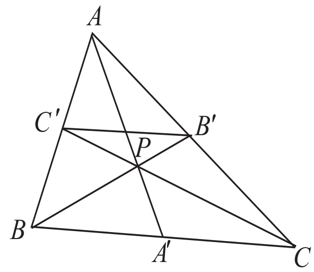
Keywords: simedian, Gergonne′s point, Nagel′s point.

MSC 2000: 51M04.

Fie dat un triunghi ABC şi fie P punctul de concurenţă a trei ceviene AA', BB', CC' cu $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ şi $C' \in (AB)$. Ne punem următoarea întrebare:

dacă două dintre segmentele $[PA']$, $[PB']$, $[PC']$ sunt congruente, triunghiul ABC este isoscel?

Cu un contraexemplu, vom arăta că răspunsul este negativ. În acest scop, avem nevoie de câteva pregătiri. Notăm cu $m = \dfrac{A'B}{A'C}$, $n = \dfrac{B'C}{B'A}$ şi $p = \dfrac{C'A}{C'B}$ rapoartele care determină poziţia cevienelor AA', BB' şi respectiv CC' faţă de triunghi. Mai jos, vom stabili formulele care dau lungimile segmentelor $[PA'], [PB']$ şi $[PC']$ funcţie de a, b, c, m, n, p.



Într-adevăr, conform teoremei lui Van Aubel, avem $\dfrac{PA}{PA'} = \dfrac{B'A}{B'C} + \dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{1}{n} + p$, de unde

$$PA' = \frac{n}{1+n+np} AA'. \tag{1}$$

Cum $aAA'^2 = b^2A'B + c^2A'C - aA'B \cdot A'C$ (teorema lui Stewart) şi cum $A'B = \dfrac{m}{m+1}a$, $A'C = \dfrac{1}{m+1}a$, obţinem

$$AA'^2 = \frac{1}{m+1}(mb^2 + c^2 - \frac{m}{m+1}a^2). \tag{2}$$

Din (1) şi (2), deducem formula pentru PA'^2; apoi, prin analogie, deducem PB'^2 şi PC'^2. Avem:

$$\begin{aligned} PA'^2 &= \left(\frac{n}{1+n+np}\right)^2 \cdot \frac{1}{m+1}\left(mb^2 + c^2 - \frac{m}{m+1}a^2\right), \\ PB'^2 &= \left(\frac{p}{1+p+pm}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1}\left(nc^2 + a^2 - \frac{n}{n+1}b^2\right), \\ PC'^2 &= \left(\frac{m}{1+m+mn}\right)^2 \cdot \frac{1}{p+1}\left(pa^2 + b^2 - \frac{p}{p+1}c^2\right). \end{aligned} \tag{3}$$

[1]Elev, Colegiul "Naţional", Iaşi

Contraexemplul următor arată că nu are loc implicaţia $PA' = PB' = PC' \Rightarrow \triangle ABC$ isoscel. Luând $a = \frac{3\sqrt{15}}{20}c$, $b = \frac{\sqrt{31}}{4}c$, obţinem un triunghi scalen pentru orice $c > 0$ (într-adevăr, $a < c < b$ şi $b < a + c$). Pentru $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = 3$ avem $mnp = 1$, deci cevienele AA', BB', CC' sunt concurente. Utilizând formulele (3), după calcule, găsim: $PA'^2 = PB'^2 = PC'^2 = \frac{9}{220}$.

Vom indica, în continuare, ceviene particulare pentru care răspunsul la întrebarea pusă este pozitiv.

I. **Mediane ($\boldsymbol{P \equiv G}$).** Avem: $GB' = GC' \Rightarrow 3GB' = 3GC' \Rightarrow BB' = CC'$ (BB', CC' mediane) $\Rightarrow \triangle ABC$ isoscel cu vârful A.

II. **Înălţimi ($\boldsymbol{P \equiv H}$).** Avem $HB' = HC' \Rightarrow \triangle HB'A \equiv \triangle HC'A \Rightarrow AB' = AC' \Rightarrow \triangle AB'B \equiv \triangle AC'C \Rightarrow AB = AC$ (triunghiurile ce intervin sunt dreptunghice).

III. **Bisectoare ($\boldsymbol{P \equiv I}$).** Este un caz mai complicat.

Dacă *numai două* dintre segmentele $[IA']$, $[IB']$, $[IC']$ sunt congruente, atunci $\triangle ABC$ poate să nu fie isoscel, după cum arată exemplul: $\triangle ABC$ cu $A = 60°$, $B = 100°$, $C = 20°$ nu este, evident, isoscel, dar se constată că $IB' = IC'$ (într-adevăr, avem $m(\widehat{IB'A}) = C + \frac{B}{2} = 70°$, $m(\widehat{IC'A}) = B + \frac{C}{2} = 110°$ şi, cu teorema sinusurilor în $\triangle AIB'$ şi $\triangle AIC'$, obţinem $2 \cdot IB' = \frac{AI}{\sin 70°} = \frac{AI}{\sin 110°} = 2IC'$, adică $IB' = IC'$).

Dacă însă $IA' = IB' = IC'$, atunci $\triangle ABC$ este echilateral. Într-adevăr, ţinând seama de formula (1) şi analoagele sale, în care $m = \frac{c}{b}$, $n = \frac{a}{c}$, $p = \frac{b}{a}$, condiţia noastră revine la $aAA' = bBB' = cCC'$. Cu formulele ce dau lungimile bisectoarelor, obţinem $\frac{1}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{c+a}\cos\frac{B}{2} = \frac{1}{a+b}\cos\frac{C}{2}$. Punând aici $b + c = 2R(\sin B + \sin C) = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$ etc., deducem egalităţile $\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{C-A}{2} = \cos\frac{A-B}{2}$. Consideraţii de rutină ne conduc la $A = B = C = 60°$.

IV. **Simediane ($\boldsymbol{P \equiv K}$).** Vom avea în vedere triunghiuri ascuţitunghice ($a^2 + b^2 - c^2 > 0$ etc.). Întrucât $m = \frac{c^2}{b^2}$, $n = \frac{a^2}{b^2}$, $p = \frac{b^2}{a^2}$, cu formula (1) obţinem $KA' = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}AA'$, iar cu (2) deducem că lungimea simedianei AA' este dată de $AA'^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\left(2 - \frac{a^2}{b^2+c^2}\right)$. Ca urmare, vom avea: $KB' = KC' \Leftrightarrow b^2BB' = c^2CC' \Leftrightarrow \frac{b^2}{c^2+a^2}\left(2 - \frac{b^2}{c^2+a^2}\right) = \frac{c^2}{a^2+b^2}\left(2 - \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{b^2}{c^2+a^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{c^2}{a^2+b^2} - 1\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{b^2}{c^2+a^2} - \frac{c^2}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^2}{c^2+a^2} =$

$\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$ (ultima paranteză scrisă fiind nenulă în condiţia că $\triangle ABC$ este ascuţitunghic) $\Leftrightarrow (b^2-c^2)(a^2+b^2+c^2)=0 \Leftrightarrow b=c$.

Afirmaţia şi calculul precedente rămân valabile şi în cazul triunghiurilor obtuzunghice în A (nu însă dacă unghiul obtuz ar fi $\widehat{B}$ sau $\widehat{C}$).

V. **Ceviene Gergonne ($\boldsymbol{P \equiv \Gamma}$).** Ştim că $AB' = AC' = p-a$, $BC' = BA' = p-b$, $CA' = CB' = p-c$, $p =$ semiperimetrul triunghiului.

Vom arăta în fapt echivalenţa condiţiilor: 1) $b=c$, 2) cevienele Gergonne ce pleacă din vârfurile B şi C sunt congruente, 3) segmentele $[\Gamma B']$ şi $[\Gamma C']$ sunt congruente.

Într-adevăr, utilizând teorema cosinusului în $\triangle ABB'$ şi $\triangle ACC'$, avem:

$$\begin{aligned} BB' = CC' &\Leftrightarrow c^2+(p-a)^2-2c(p-a)(\cos A = b^2+(p-a)^2-2b(p-a)\cos A \\ &\Leftrightarrow b^2-c^2-2(b-c)(p-a)\cos A = 0 \Leftrightarrow (b-c)[b+c-2(p-a)\cos A]=0 \\ &\Leftrightarrow b=c \end{aligned}$$

(paranteza pătrată nu se anulează: în caz contrar, am avea $\cos A = \dfrac{b+c}{b+c-a} > 1$, fals).

Presupunem acum că $\Gamma B' = \Gamma C'$. Atunci $\triangle \Gamma B'C'$ este isoscel, deci $\widehat{BB'C'} \equiv \widehat{CC'B'}$. De asemenea, deoarece $\triangle AB'C'$ este isoscel, avem şi $\widehat{BC'B'} \equiv \widehat{CB'C'}$. Aşadar, $\triangle BB'C' \equiv \triangle CC'B'$ şi deducem că $BB' = CC'$ şi, ca urmare, $b=c$.

VI. **Ceviene Nagel ($\boldsymbol{P \equiv N}$).** În acest caz, $BC' = CB' = p-a$, $CA' = AC' = p-b$, $AB' = BA' = p-c$. Urmăm calea parcursă în cazul precedent.

Cu teorema cosinusului, aplicată în $\triangle ABB'$ şi $\triangle ACC'$, relativ la cevienele Nagel BB' şi CC', avem:

$$\begin{aligned} BB' = CC' &\Leftrightarrow c^2+(p-c)^2-2c(p-c)\cos A = b^2+(p-b)^2-2b(p-b)\cos A \\ &\Leftrightarrow b^2-c^2+[(p-b)^2-(p-c)^2]-2\cos A[b(p-b)-c(p-c)]=0 \\ &\Leftrightarrow (b-c)[b+c-a+\cos A(b+c-a)] \Leftrightarrow b=c. \end{aligned}$$

Fie acum $NB' = NC'$, iar $\triangle ABC$ va fi considerat ascuţitunghic. Observăm că relativ la $\triangle NBC'$ şi $\triangle NCB'$ avem: $NC' = NB'$, $BC' = CB' = p-a$ şi au unghiuri opuse în vârful comun N. Atunci, $\widehat{NBC'} \equiv \widehat{NCB'}$, fiind ascuţite; triunghiurile sunt congruente şi vom avea $BN = CN$. Rezultă că $BB' = CC'$ şi, apoi, $b=c$.

Recreaţii ... matematice

Prin ce proprietate sunt înrudite următoarele numere:
1, 3, 13, 85, 781, 9 331, 137 257, 2 396 745, 48 427 461 ?

N.B. Răspunsul se găseşte la pag. 127.