

Asupra problemei C.O: 5004 din G.M.

Dan Mihai MOCANU ¹

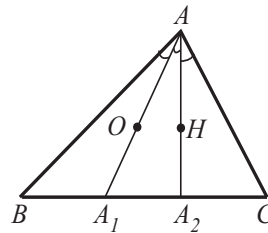
Abstract. In this Note, the problem C.O.: 5004 of the journal G.M. – 2/2009, p.103 is generalized and a couple of simple results in a triangle are established; they deal with isogonal lines and angle trisectors.

Keywords: altitudes, angle bisector, isogonal lines, angle trisectors, symmedians.

MSC 2000: 51F20.

Scopul prezentei note este de a stabili câteva rezultate într-un triunghi, legate de cevienele izogonale care sunt în același timp și trisectoare.

Fie ABC un triunghi oarecare și $A_1, A_2 \in (BC)$. Se spune că cevienele (AA_1) , (AA_2) sunt izogonale dacă $\widehat{BAA_1} \equiv \widehat{CAA_2}$ și că sunt trisectoare ale unghiului \widehat{A} dacă $\widehat{BAA_1} \equiv \widehat{A_1AA_2} \equiv \widehat{A_2AC}$.



Afirmația următoare are o demonstrație imediată.

Propoziție. Dacă (AA_1) și (AA_2) sunt cevien izogonale și una din ele este bisectoarea unghiului dintre o latură și cealaltă, atunci ele sunt trisectoarele unghiului \widehat{A} .

Demonstrație. Să presupunem că (AA_1) este bisectoarea unghiului $\widehat{BAA_2}$ (la fel demonstrăm dacă (AA_2) ar fi bisectoarea unghiului $\widehat{A_1AC}$). Avem, deci, $\widehat{BAA_1} \equiv \widehat{A_1AA_2}$. Cum $\widehat{BAA_1} \equiv \widehat{A_2AC}$ (AA_1 și AA_2 sunt izogonale), rezultă că $\widehat{BAA_1} \equiv \widehat{A_1AA_2} \equiv \widehat{A_2AC}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Consecința 1. (C.O.: 5004 din G.M.-2/2009, p.102). În triunghiul ascuțitunghic ABC se consideră înălțimea AH . Să se arate că, dacă bisectoarea unghiului \widehat{BAH} trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC , atunci semidreapta (AH) este trisectoare a unghiului \widehat{BAC} .

Laura Constantinescu

Demonstrație. Se știe că înălțimea coborâtă din A și diametrul ce are A ca o extremitate a sa sunt izogonale. Dar, prin ipoteză, acest diametru este bisectoarea unghiului \widehat{BAH} . Conform propoziției precedente (AH) este trisectoare a unghiului \widehat{A} .

Consecința 2. Dacă AH este înălțime, O este centrul cercului circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC , iar (AH) este bisectoarea unghiului \widehat{OAC} , atunci (AO) este trisectoare a unghiului \widehat{BAC} .

Demonstrație. Se procedează ca în Consecința 1.

Observație. Dacă una dintre (AH) sau (AO) este trisectoare, atunci și cealaltă este trisectoare.

¹Elev, cl. a IX-a, Colegiul Național, Iași

Următoarele rezultate pot fi privite ca reciproce ale consecințelor de mai sus.

Reciprocă (a Consecinței 1). *Dacă* (AA_2 este o trisectoare a unghiului ascuțit-unghic ABC și (AO este bisectoarea unghiului $\widehat{BAA_2}$, atunci A_2 este înălțime.

Demonstrație. Din condițiile ipotezei, rezultă că (AA_2 și (AO fac cu laturile triunghiului unghiuri de măsură $\frac{A}{3}$. Atunci și (AH , ca izogonală a lui (AO , face cu AC un unghi de măsură $\frac{A}{3}$. Ca urmare (AA_2 coincide cu (AH .

Reciprocă (a Consecinței 2). *Dacă* (AA_1 este o trisectoare a unghiului ascuțit-unghic ABC și (AH este bisectoarea unghiului $\widehat{A_1AC}$, atunci $O \in (AA_1$.

Demonstrație. La fel ca pentru reciproca precedentă.

Observație. În loc de "înălțime-diametru", putem lua o altă pereche de ceviane izogonale; de exemplu, "mediană-simediană". Trecerea rezultatelor de mai sus la noua pereche se face cu ușurință.

În încheiere, vom rezolva o problemă strâns legată de cele de mai sus.

Problemă. Fie un triunghi ABC , $AB > AC$. Fie (AM) mediana relativ la latura (BC) și (AN) simediana corespunzătoare. Arătați că, dacă (AM sau (AN este trisectoare a unghiului \widehat{BAC} , atunci $\frac{AB}{AC} = 2 \cos \frac{A}{3}$.

Demonstrație. Ambele vor fi trisectoare. Cu ajutorul ariilor, avem

$$AB \cdot AM \sin \widehat{BAM} = AC \cdot AM \sin \widehat{CAM},$$

de unde

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \widehat{CAM}}{\sin \widehat{BAM}} = \frac{\sin \frac{2A}{3}}{\sin \frac{A}{3}} = 2 \cos \frac{A}{3}.$$

Recreații ... matematice

În toamna anului 1999 a apărut primul număr al revistei **Recreații Matematice**. În anul acesta se împlinesc **10 ani** de la apariția acesteia.

Scrieți numărul 2009 cu ajutorul numărului 10 și folosind numai operațiile de adunare și împărțire !

Care este numărul maxim de operații cu care puteți face acest lucru ?

Dar cel minim ?

(Nu se acceptă termeni nuli !)

Notă. Răspunsurile la aceste întrebări sunt date la pag.