NOTA ELEVULUI

Inegalităţi stabilite cu un procedeu de reducere a numărului de variabile - Mixing variables

***Iurie BOREICO*[1], *Andrei CIUPAN*[2]**

Prezentăm în cele ce urmează un procedeu mai recent de rezolvare a inegalităţilor folosit adesea pentru rezolvarea inegalităţilor de tip olimpiadă. Ideea ce stă la baza acestuia este urmmătoarea: când avem de-a face cu inegalităţi, este convenabil să transformăm o problemă ce comportă trei variabile într-una numai cu două variabile, sau să reducem inegalitatea la cazul când unul din numere este egal cu 0. Vom ilustra acest procedeu prin câteva probleme rezolvate în acest fel. Pornim cu o inegalitate simplă şi binecunoscută:

Exemplul 1. *Dacă $a+b+c=1$, să se arate că $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$.*

Soluţie. Să considerăm funcţia $f(a,b,c) = a^2+b^2+c^2-\frac{1}{3}$ şi să arătăm că $f(a,b,c) \geq 0$. Observăm că tripletele (a,b,c) şi $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$ au aceeaşi sumă şi evaluăm diferenţa

$$D = f(a,b,c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right).$$

Se vede uşor că $D = \frac{1}{2}(a-b)^2 \geq 0$, adică $f(a,b,c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$, deci ar fi de ajuns să demonstrăm că $f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 0$, ceea ce este mai convenabil. Acest lucru este echivalent cu $\frac{(a+b)^2}{2}+c^2 \geq \frac{1}{3}$. Fiindcă $a+b+c=1$, rezultă că $a+b=1-c$, deci ne rămâne să demonstrăm că $(1-c)^2+2c^2 \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow (c\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 \geq 0$, evident adevărată. Menţionăm că inegalitatea de mai sus are multe alte soluţii.

Să ne ocupăm de probleme mai dificile, care au soluţii surprinzător de directe prin aceast procedeu.

Exemplul 2. *Dacă $a,b,c \geq 0$, să se arate că $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.*

Soluţie. Fie $f(a,b,c) = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}$. Vom arăta că $f(a,b,c) \geq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$. Explicitând şi apoi desfăcând parantezele, se obţine inegalitatea echivalentă $b^3+c^3+ab^2+ac^2 \geq 2abc+b^2c+bc^2$, inegalitate imediată datorită inegalităţii mediilor: $b^3+c^3 \geq b^2c+bc^2$ şi $a(b^2+c^2) \geq a \cdot 2bc$. Prin urmare, rămâne să arătăm că $f(a,t,t) \geq 0$, unde $t = \frac{b+c}{2}$. Această relaţie este echivalentă cu

[1] Elev, Chişinău
[2] Elev, Bucureşti

$\dfrac{a}{2t} + \dfrac{2t}{a+t} \geq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow (a-t)^2 \geq 0$, adevărat. Deci problema este rezolvată.

Exemplul 3. *Dacă* $a, b, c > 0$ *şi* $abc = 1$, *atunci* $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(ab+bc+ca)$.

Soluţie. Fie $f(a,b,c) = a^2+b^2+c^2+3-2(ab+bc+ca)$. Considerăm un triplet convenabil, care să păstreze condiţia $abc = 1$. Un astfel de triplet poate fi $(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c)$. Avem $f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) = ab+ab+c^2+3-2(ab+2\sqrt{c}) = c^2-4\sqrt{c}+3$. Mai departe, $D = f(a,b,c) - f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) = a^2+b^2+4\sqrt{c}-2(ab+bc+ca) = (a-b)^2+2c(2\sqrt{ab}-a-b)$, deci

$$D = (a-b)^2 - 2c(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = (a-b)^2 - 2c \cdot \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

Fiindcă relaţia din enunţ este simetrică, putem presupune că $c = \min\{a,b,c\}$. Atunci deducem că $c < \sqrt{2}$. Asta înseamnă că $c^2 \leq 2 \Leftrightarrow 2ab \geq c \Rightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 2c \Rightarrow (a-b)^2 - 2c \cdot \dfrac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \geq 0$, deci $D \geq 0$. Aşadar, rămâne să arătăm că $f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) \geq 0 \Longleftrightarrow c^2+3 \geq 4\sqrt{c}$, adevărată din inegalitatea mediilor pentru patru numere.

Exemplul 4. *Dacă* $a, b, c > 0$ *şi* $abc = 1$, *atunci* $a^2+b^2+c^2+3 \geq a+b+c+ab+bc+ca$.

Soluţie. Să considerăm funcţia $f(a,b,c) = \sum a^2 - \sum a - \sum ab + 3$ şi să demonstrăm că $f(a,b,c) \geq 0$. Vom alege un triplet convenabil pe care să-l intercalăm între $f(a,b,c)$ şi 0. Un astfel de triplet, la care şi produsul e invariant este $(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c)$. Se vede că $f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) = c^2+ab-3-2\sqrt{ab}-c(1+2\sqrt{ab})$. Atunci $D = f(a,b,c) - f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) = a^2+b^2-(a+b)-(bc+ca)-2ab+2\sqrt{ab}+2c\sqrt{ab}$. Prin grupare convenabilă a termenilor, se obţine $D = (a-b)^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(c+1) = (a-b)^2 - \dfrac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}(c+1)$, de unde $D = (a-b)^2\left(1 - \dfrac{c+1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\right)$. Fiindcă inegalitatea din enunţ este simetrică, putem presupune că $c = \min\{a,b,c\}$. De aici, $c \leq 1$ şi $ab \geq 1$, de unde obţinem succesiv $c+1 < 4 \leq 4\sqrt{ab} \leq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, deci $\dfrac{c+1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} - 1 < 0 \Rightarrow D \geq 0$. Deci, să demonstrăm că $f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) \geq 0 \Leftrightarrow c^2 + (1/\sqrt{c}-1)^2 + 2 \geq c + 2\sqrt{c}$. Dar această relaţie din urmă este adevarată, deoarece $c^2+2 \geq 2c+1 \geq c+2\sqrt{c}$. În concluzie, problema este rezolvată.

Exemplul 5. *Se dau* $a, b, c \geq 0$, *cu* $a+b+c = 3$. *Atunci* $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$.

(*Indicaţie.* Considerăm $f(a,b,c) = \sum \sqrt{a} - \sum ab$. Atunci

$$f(a,b,c) - f(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}) = \sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{2(b+c)} - bc + \frac{(b-c)^2}{2} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{2}\right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{2(b+c)})-4}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{2(b+c)}}.$$

Cu presupunerea $a = \min\{a,b,c\}$ şi după efectuarea calculelor, se obţine $f(a,b,c) \geq f(a, \dfrac{b+c}{2}, \dfrac{b+c}{2}) \geq 0$.)

Exemplul 6 (*Inegalitatea lui Schur*). *Dacă $a, b, c \geq 0$ şi $r \geq 0$, atunci*

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Soluţie. Să considerăm $f(a,b,c) = a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-a)(b-c)+c^r(c-a)(c-b)$ şi să demonstrăm că $f(a,b,c) \geq 0$. Se poate observa că $f(a,a,c) = c^r(c-a)^2 \geq 0$. Rămâne să arătăm că $f(a,b,c) \geq f(a,a,c) \Leftrightarrow f(a,b,c) - f(a,a,c) \geq 0$. Dar, un mic calcul ne arată că $f(a,b,c) - f(a,a,c) = (a-b)\left[(a-c)(a^r - c^r) + b^r(c-b)\right] \geq 0$, dacă considerăm ordonarea $a \geq c \geq b$, permisă de simetria inegalităţii din enunţ. Prin urmare, $f(a,b,c) \geq f(a,a,c) \geq 0$ şi inegalitatea este demonstrată.

Exemplul 7. *Dacă $a, b, c \geq 0$, $a+b+c = 1$, atunci $a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27}$.*

Soluţie. Se observă că alegerile de triplete folosite în exemplele precedente nu mai duc la rezolvarea problemei; este nevoie de alegerea unui triplet inspirat. Pentru că "ghicim" şi verificăm că egalitatea are loc dacă $a = 0$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$, încercăm un alt triplet care să ilustreze acest caz de egalitate. Mai întâi, considerăm funcţia $f(a,b,c) = a^2b+b^2c+c^2a - \frac{4}{27}$, apoi evaluăm diferenţa $D = f(a,b,c) - f(0,a+b,c)$. Obţinem $D = -a\,(bc - (c-a)(c-b))$. Atunci când c este între a şi b, se vede că $D \leq 0$ (putem face această presupunere, deoarece inegalitatea din enunţ este ciclică în cele trei variabile). Deci ar fi de ajuns să demonstrăm că $f(0, a+b, c) \leq 0$. Deoarece $a+b+c = 1$, relaţia precedentă este echivalentă cu $(a+b)^2c \leq \frac{4}{27} \Leftrightarrow 2c(1-c)(1-c) \leq \frac{8}{27}$, care rezultă direct din inegalitatea mediilor.

Exemplul 8. *Dacă $a, b, c \geq 0$ şi $a+b+c = 3$, să se afle maximul expresiei*

$$E(a,b,c) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Soluţie. Dacă $a = b = c = 1$, atunci expresia are valoarea 6, care nu este maximul ei. Însă vedem că, dacă luăm un numar egal cu 0 şi celelalte două egale cu $\frac{3}{2}$, atunci expresia ia valoarea $\frac{27}{4}$. Vom arăta că acesta este maximul expresiei. Considerăm funcţia $f(a,b,c) = ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) - \frac{27}{4}$. Cu presupunerea $a \leq b \leq c$, obţinem $f(a,b,c) - f(a+b,c,0) = a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-(a+b)^2c-c^2(a+b) = ab(a+b-2c) \leq 0$. Cum $f(a+b,c,0) \leq 0 \Leftrightarrow (a+b)\cdot c\cdot(a+b+c) \leq \frac{27}{4} \Leftrightarrow (a+b)c \leq \frac{9}{4}$ (adevărată din inegalitatea mediilor!), problema este rezolvată.

Exemplul 9 (*Inegalitatea lui Turkevici*). *Dacă $a, b, c, d \geq 0$, atunci*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

(*Indicaţie.* Notăm $f(a,b,c,d) = \sum a^4 + 2abcd - \sum a^2b^2$. Presupunând ordinea $a \leq b \leq c \leq d$, se arată că $f(a,b,c,d) \geq f(a,b,c,c) \geq f(a,b,b,b) \geq f(a,a,a,a) = 0$.)

Exemplul 10. *Dacă $a, b, c \geq 0$, să se arate că $(a+b+c)^5 \geq 81abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$.*

Soluţia 1. Inegalitatea din enunţ fiind omogenă, putem presupune că $a+b+c = 3$. Astfel, rămâne să demonstrăm că $abc\left(a^2+b^2+c^2\right) \leq 3$. Fie $f(a,b,c) =$

$abc\left(a^2+b^2+c^2\right)-3$. Se arată că $f\left(a,\dfrac{b+c}{2},\dfrac{b+c}{2}\right)-f(a,b,c)\geq 0$ şi apoi că $f\left(a,\dfrac{b+c}{2},\dfrac{b+c}{2}\right)\leq 0$ în urma unor calcule de rutină.

Soluţia 2. Se ţine cont din nou de omogenitatea inegalităţii din enunţ şi se presupune $abc=1$. Pentru a demonstra că $(a+b+c)^6\geq 81(a^2+b^2+c^2)$ se procedează astfel: arătăm că $f(a,b,c)\geq f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})\geq 0$, unde $f(a,b,c)=(a+b+c)^6-81(a^2+b^2+c^2)$.

Soluţia 3. Vom demonstra inegalitatea din enunţ fără a folosi metoda "mixing variables", pentru a arăta că, deşi aceasta metodă este eficienta pentru un număr foarte mare de probleme, pot exista şi soluţii mai simple. Folosind binecunoscuta inegalitate $(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)$, deducem că $abc\leq\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{3(a+b+c)}$, deci ar fi de ajuns să demonstrăm că $(a+b+c)^6\geq 27\,(ab+bc+ca)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$. Am putea finaliza rezolvarea tot prin mixing variables, dar alegem inegalitatea mediilor:

$$(a+b+c)^2=\sum a^2+\sum ab+\sum ab\geq 3\sqrt[3]{\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)^2},$$

de unde, prin ridicare la puterea a treia, rezultă chiar inegalitatea căutată.

Exemplul 11. *Se dau $a,b,c\geq 0$, astfel încât $ab+bc+ca=1$. Să se afle minimul expresiei* $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$.

(*Indicaţie.* Minumul este $\dfrac{5}{2}$, şi se obţine când două din numere sunt egale cu 1 şi celălalt este 0. Putem considera două triplete pentru compararea cu $f(a,b,c)$ şi cu 0: *a)* $f(a,b,c)\geq f(a,t,t)\geq 0$, $t=\sqrt{(a+b)(a+c)}-a$; *b)* $f(a,b,c)\geq f\left(0,\dfrac{1}{a+b},a+b\right)\geq 0$.)

Aplicaţii

1. Se dau $x,y,z\geq 0$ şi $x+y+z=3$; să se arate că $x^2+y^2+z^2+xyz\geq 4$.

2. Se dau $a,b,c>0$, $abc=1$; să se arate că $3(a^2+b^2+c^2)+23\geq$ $\geq 4\,(a+1)\,(b+1)\,(c+1)\,.$

3. Dacă $a,b,c>0$ şi $abc=1$, să se arate că $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{6}{a+b+c}\geq 5$.

4. Fie $a,b,c\geq 0$, $a+b+c=1$. Să se arate că $a^2b+b^2c+c^2a+abc\leq\dfrac{4}{27}$.

5. Dacă $a,b,c\geq 0$, să se arate că $\left(\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(b+c)^2}+\dfrac{1}{(c+a)^2}\right)(ab+bc+ca)\geq$ $\geq\dfrac{9}{4}$ (*Olimpiadă Iran, 1996*).

6. Dacă $a,b,c\in[\frac{1}{3};3]$, să se arate că $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}\geq\dfrac{7}{5}$.

7. Fie $a,b,c>0$ şi $abc=1$. Să se arate că $2(a^2+b^2+c^2)+18\geq 3(a+1)(b+1)(c+1)$.

8. Numerele reale a, b, c satisfac relaţia $a^2+b^2+c^2=9$. Să se arate că $2\,(x+y+z)-xyz\leq 10$ (*Test de selecţie, Vietnam*).

9. Dacă $a,b,c\geq 0$, să se arate că $(a+b+c)^4\geq 16\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$.

10. Dacă $a, b, c \geq 0$ şi $a + b + c = 1$, atunci să se arate că

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right) \geq 8 \cdot \left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2.$$

11. Dacă $a, b, c \geq 0$ cu $a + b + c = 3$ şi $k \geq 0$, să se afle valoarea maximă a expresiei

$$E_{a,b,c} = ab(a+b+k) + bc(b+c+k) + ca(c+a+k) \quad \textit{(Andrei Ciupan, 2007)}.$$

12. Se dau numerele reale pozitive $a_1, a_2 \ldots a_n$ astfel încât $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 = 1$. Să se afle maximul expresiei $E = (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)$ (*Baraj,Seniori,România,2007*).

Bibliografie

1. **V. Cârtoaje** - *Algebraic Inequalities*, Editura GIL, 2006.
2. **M. O. Drâmbe** - *Inegalităţi - Idei şi Metode*, Editura GIL, 2003.
3. Site MathLinks: www.mathlinks.ro .

Din partea redacţiei

De-a lungul celor nouă ani de apariţie a *Recreaţiilor Matematice*, am avut bucuria de a urmări evoluţia multor elevi de excepţie. Probleme şi note semnate **Gabriel Dospinescu**, *elev*, *Oneşti*, au fost urmate de altele semnate de acelaşi, dar *student*, *Bucureşti*, şi apoi *student*, *Paris*. Alţi tineri, precum **Oana Cârjă**, **Cezar Lupu**, **Irina Mustaţă**, **Marius Pachiţariu** (pentru a-i aminti măcar pe premianţii revistei) şi-au făcut ucenicia în paginile *Recreaţiilor*, fiind acum studenţi eminenţi ai unor universităţi prestigioase.

Parcă însă nicio promoţie nu ne-a adus atâţia colaboratori ca aceea care tocmai şi-a încheiat studiile liceale în 2007. Ne facem o plăcută datorie de a aminti numele acestor proaspeţi studenţi (majoritatea la facultăţi de matematică):

Adrian Zahariuc, Bacău (o notă matematică, 15 probleme propuse);

Alexandru Negrescu, Botoşani (două note matematice, 10 probleme propuse);

Iurie Boreico, Chişinău (o notă matematică, 2 probleme propuse);

Vlad Emanuel, Sibiu (6 probleme propuse, cel mai bun rezolvitor);

Bogdan Ciacoi, Gherla (două note matematice, 1 problemă propusă).

Alături de aceştia, au mai publicat o notă **Anca Timofte** şi **Alexandru Ţurcanu** (Botoşani), au propus probleme originale **Cristian Săvescu** (Focşani), **Ruxandra Vâlcu**, **Iulia Zanoschi**, **Florin Asăvoaie** (toţi din Iaşi), au fost menţionaţi cu soluţii deosebite ale unor probleme **Dana Timofte**, **Diana Prodan**, **Adrian Hamciuc** (Iaşi), au primit premii acordate rezolvitorilor **Ciprian Costin**, **Radu Ciucanu**, **Mihai Dănăilă**, **Mircea Avram**, **Andrei Tofan**, **Călin Turliuc**, **Ştefana Brănişteanu**, **Alina Andriescu** şi **Irina Pruteanu**.

Tuturor le mulţumim, le dorim succes în viitor şi pe toţi îi aşteptăm în continuare alături de *Recreaţii Matematice*!