O problemă despre suma cifrelor unui număr natural în baze de numeraţie oarecare

Adrian ZAHARIUC[1]

1. Introducere. Studiul cifrelor puterilor unui număr întreg este o problemă dificilă de teoria numerelor. Pentru ultimele progrese în acest sens, cititorul poate consulta [**2**]. Există multe probleme, evidente din punct de vedere intuitiv, care încă sunt departe de a fi rezolvate. Chiar şi faptul că suma cifrelor lui a^n tinde la infinit nu este atât de evident, fiind un rezultat binecunoscut al lui Schnirelman. Printre întrebările ce apar, una pare adevărată dincolo de orice îndoială, dar aproape imposibil de atacat.

Propoziţia 1. *a şi b sunt numere naturale nenule astfel încât*

$$s(a^n) = s(b^n) \tag{1}$$

pentru orice n. Atunci $\lg a - \lg b \in \mathbb{Z}$. ($s\,(N)$ notează suma cifrelor numărului N.)

Observaţie. Desigur, $\lg a - \lg b = \lg a/b$, deci $\lg a - \lg b \in \mathbb{Z}$ înseamnă de fapt că $a = b$ sau că numărul mai mare dintre a şi b este obţinut din celălalt prin adăugarea câtorva 0-uri la sfârşit. Este evident că reciproca acestui fapt este adevărată.

Propoziţia 2. *a şi b sunt numere naturale nenule astfel încât*

$$s(an) = s(bn) \tag{2}$$

pentru orice n. Atunci $\lg a - \lg b \in \mathbb{Z}$.

Este clar că aceasta este o variantă mai slabă a problemei anterioare. De fapt, (2) este mult mai restrictivă decât (1); în caz că (2) este adevărată, avem

$$s(a^n) = s(a^{n-1}b) = s(a^{n-2}b^2) = \cdots = s(ab^{n-1}) = s(b^n),$$

deci (1) este de asemenea adevărată. Astfel, am devenit interesaţi de această întrebare. Am crezut că nu avem de verificat decât un lucru simplu, dar adevărul s-a dovedit a fi altul.

2. Observaţii preliminare. O modalitate naturală de a ataca problema este să vedem care termeni ai şirurilor $s(an)$ şi $s(bn)$ pot fi calculaţi uşor. Această metodă nu se va dovedi eficientă, dar ne va da o imagine asupra problemei. Este cunoscută următoarea

Lemă. *Dacă $N \leq 10^k - 1$, atunci*

$$s\left(\left(10^k - 1\right) N\right) = 9k.$$

Demonstraţie. Putem presupune că 10 nu divide N. Fie $N = \overline{b_1 b_2 \ldots b_k}$, unde primele cifre pot fi şi nule. Este mai convenabil şi mai uşor să calculăm o diferenţă

[1] Elev, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "Ferdinand I", Bacău

decât un produs:

$$s\left(\left(10^k-1\right)N\right)=s\left(10^kN-N\right)=s(\overline{b_1b_2\dots b_k\underbrace{00\dots00}_{k\text{ cifre}}}-\overline{b_1b_2\dots b_k})=$$

$$=s\left(\overline{b_1b_2\dots b_{k-1}(b_k-1)(9-b_1)(9-b_2)\dots(9-b_{k-1})(10-b_k)}\right)=9k,$$

deci lema este demonstrată.

Ce se întâmplă dacă folosim aceasta în problema noastră? Dacă $10^k-1>a$ şi b, atunci

$$s\left(\left(10^k-1\right)a\right)=9k \quad \text{şi} \quad s\left(\left(10^k-1\right)b\right)=9k,$$

deci, de fapt, $s(an)=s(bn)$ pentru toţi $n=10^k-1$ suficient de mari, ignorând ipoteza noastră. Aşadar, din această observaţie, împreună cu observaţia că adăugarea 0-urilor în numerele n nu are efect, concluzionăm că toate şirurile de forma $s(an)$ au structuri similare şi chiar valori comune pentru anumite valori ale lui n. Mai mult, este clar că alegerea unor valori "frumoase" ale lui n nu este o tehnică utilă.

Dar ce s-ar întâmpla dacă am reuşi să găsim forme simple pentru an sau bn? Aceasta este prima idee utilă.

Desigur, putem tăia 0-urile de la sfârşitul numerelor a şi b, deci 10 nu divide nici a nici b, şi ne ramâne să arătăm că $a=b$. Presupunem că nu este adevărat şi luăm $a>b$. Atunci, evident, pentru orice n, $an>bn$. Vrem să găsim un număr an care are suma cifrelor mai mare decât cea a tuturor numerelor mai mici decât el. Evident, aceasta va contrazice $s(an)=s(bn)$ şi problema este rezolvată. Dar care sunt aceste numere? Sunt numerele care conţin doar cifra 9, eventual, cu excepţia primei cifre. Nu este greu să vedem că a are un astfel de multiplu dacă şi numai dacă $(a,10)=1$. Deci, în acest caz, problema este rezolvată. Din păcate, nu putem rezolva pe aceeaşi idee cazul în care a sau b sunt divizibile cu puteri mari ale lui 2 sau 5. Oricum, dacă am fi folosit o bază primă în locul lui 10, problema ar fi fost rezolvată. Din acest motiv considerăm potrivit să generalizăm problema pentru o bază de numeraţie oarecare.

Propoziţia 3. *Fie $b\geq 2$, iar m şi n două numere naturale nenule astfel încât*

$$s_b(km)=s_b(kn),$$

pentru orice k. Atunci $\log_b m-\log_b n\in\mathbb{Z}$.

3. Soluţia problemei. *Pasul 1.* Vom arăta ca fracţia n/m are un număr finit de cifre după virgulă. Pentru fiecare i, există un $k_i\in\mathbb{Z}$ astfel încât

$$b^i\leq k_im\leq b^i+m-1.$$

Atunci, deoarece funcţia s_b este subaditivă,

$$s_b(k_im)\leq s_b(b^i)+s(k_im-b^i)=1+s_b(k_im-b^i)\leq 1+k_im-b^i\leq m.$$

Să fixăm $j\in\mathbb{N}$, foarte mare. Vom demonstra că pentru orice i suficient de mare, primele $j-1$ cifre ale lui k_in coincid cu primele $j-1$ cifre ale lui n/m. Prima cifră a lui n/m este prima cifră din stânga diferită de 0 indiferent dacă este înainte sau după virgulă. Fie

$$C = b^{-j} \left\lfloor \frac{n}{m} b^j \right\rfloor .$$

Avem

$$C \le \frac{n}{m} = \frac{k_i n}{k_i m} < C + \frac{1}{b^j} \Leftrightarrow k_i m C \le k_i n < k_i m \left(C + \frac{1}{b^j} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^i C \le k_i n < \left(b^i + m \right) \left(C + \frac{1}{b^j} \right) = b^i C + \frac{b^i}{b^j} + m \left(C + \frac{1}{b^j} \right) \qquad (*)$$

Ca să stabilim faptul că primele $j-1$ cifre ale lui $k_i n$ sunt aceleaşi cu primele $j-1$ cifre ale lui n/m, trebuie să arătăm că

$$b^i C \le k_i n < b^i C + \frac{b^{i+1}}{b^j}.$$

Conform $(*)$, este suficient să arătăm că

$$m \left(C + \frac{1}{b^j} \right) < \frac{b^i (b-1)}{b^j},$$

care este adevărată pentru i suficient de mare. Atunci, pentru orice j, există termeni ai şirului $k_i n$ care au suma cifrelor cel puţin egală cu suma primelor $j-1$ cifre ale lui n/m.

Cum $s_b(k_i m) \le m$, pentru orice i rezultă că şirul $s_b(k_i n)$ este mărginit. De aici deducem că toate cifrele în baza b ale lui n/m sunt 0, eventual cu excepţia unui număr finit.

Pasul 2. Vom începe cu un rezultat simplu, dar important. Nu-l vom demonstra, fiind binecunoscut.

Lemă. *A şi B au proprietatea că A/B are un număr finit de cifre după virgulă în baza b. Atunci, toţi factorii primi ai lui*

$$\frac{B}{(A,B)}$$

se numără printre factorii primi ai lui b. Altfel spus, dacă p este prim, $(p,b)=1$, atunci $\exp_p m \ge \exp_p n$. ($\exp_p A$ notează exponentul numărului p în descompunerea lui A.)

Am văzut că n/m are un număr finit de cifre după virgulă. Dar, desigur, putem demonstra analog că şi m/n are un număr finit de cifre după virgulă. Atunci, conform lemei, pentru orice p care nu îl divide pe b, $\exp_p m = \exp_p n$. Cu alte cuvinte,

$$\text{dacă } \; b = \prod_1^t p_i^{\alpha_i}, \quad \text{atunci } m = N \prod_1^t p_i^{r_i} \;\; \text{şi} \;\; n = N \prod_1^t p_i^{s_i},$$

cu $(N,b)=1$. Să fixăm $f \in \mathbb{N}$ suficient de mare şi să luăm

$$k_1 = \prod_1^t p_i^{f\alpha_i - s_i}.$$

Înlocuind k din ipoteza $s_b(km) = s_b(kn)$ cu kk_1, obţinem

$$s_b(k_1km) = s_b(k_1kn) \Leftrightarrow s_b\left(k\prod_1^t p_i^{f\alpha_i - s_i + r_i}N\right) = s_b\left(kb^f N\right) = s_b(kN), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Pentru simplitate, fie

$$K = \prod_1^t p_i^{f\alpha_i - s_i + r_i}.$$

Atunci, $s_b(kNK) = s_b(kN)$ pentru toţi $k \in \mathbb{N}$, care reduce problema cu mult. Este important să ţinem minte că $(N, b) = 1$.

Pasul 3. Să arătăm că $\log_b K \in \mathbb{Z}$. Deoarece $s_b(kNK) = s_b(kN)$ pentru toţi $k \in \mathbb{N}$, deducem că

$$s_b(N) = s_b(KN) = s_b(K^2N) = s_b(K^3N) = \ldots$$

În particular, aceasta înseamna că mulţimea $\{s_b(K^uN) : u \in \mathbb{N}\}$ este marginită.

Dacă $\log_b K \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, vom arăta că pentru orice înşiruire de cifre, există un u astfel încât K^uN începe exact cu acea secvenţă de cifre, ceea ce ar conduce la o contradicţie. Pentru aceasta, este suficient să arătăm că mulţimea

$$\{\{\log_b K^uN\} : u \in \mathbb{N}\},$$

unde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, este densă în $[0, 1]$. Dar, deoarece $\log_b K^uN = u \log_b K + \log_b N$, aceasta rezultă imediat din lema lui Kronecker. Amintim că lema lui Kronecker afirmă faptul că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mulţimea $\{\{\alpha n\} : n \in \mathbb{N}\}$ este densă în $(0, 1)$. Aşadar, am arătat că $\log_b K \in \mathbb{Q}$.

Să presupunem, prin absurd, că $\log_b K \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z}$. Este foarte interesant să observăm că acest lucru nu este posibil decât atunci când b este o putere netrivială şi că demonstraţia este făcută în toate celelalte cazuri. Observăm că $\log_b K \in \mathbb{Q}$ înseamnă de fapt că, pentru orice p, $\exp_p K = \log_b K \exp_p b$. Fie $r = \lfloor \log_b K \rfloor$; atunci $\exp_p K \geq r \cdot \exp_p b$, deci $b^r \mid K$. Fie $K' = K/b^r$; este clar că $K' < b$, deci K' este o cifră în baza b. Deoarece K' este obţinut din K prin ştergerea 0-urilor în baza b, rezultă că $s_b(kNK') = s_b(kN)$, pentru orice k. Deoarece $(N, b) = 1$, nu este greu să arătăm că N are un multiplu kN de forma $11\ldots11$ în baza b (există două numere de această formă congruente modulo K; deci K divide diferenţa lor, care, după omiterea 0-urilor de la sfârşit este de forma $11\ldots11$). Deci $s_b(kN) = a$ şi $s_b(kNK') = K'a$, de unde $K' = 1$. Aşadar, $K = b^r$, deci $\log_b K \in \mathbb{Z}$ şi, deoarece $\log_b K = f + (\log_b m - \log_b n) \in \mathbb{Z}$, va rezulta că afirmaţia din Propoziţia 3 este adevărată.

Bibliografie

1. **G. Dospinescu, A. Zahariuc** - *Suma cifrelor unui număr natural*, Arhimede. Revistă de cultură matematică (Bucureşti), 2004, nr. 3-4, 2-15.
2. **R. Blecksmith, M. Filaseta, C. Nicol** - *A result on the digits of* a^n, Acta Arith. 64(3), 1993, 331-339.
3. **http://www.mathlinks.ro**