Generalizări ale unor inegalităţi din RecMat

Alexandru NEGRESCU[1]

Ne propunem să generalizăm următoarele inegalităţi apărute în revista "Recreaţii Matematice":

X.53. (nr. 2/2004, p. 155). *Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ astfel încât $a + b + c = 9$. Să se arate că*

$$\log_a \left(2b^3 + c^3\right) + \log_b \left(2c^3 + a^3\right) + \log_c \left(2a^3 + b^3\right) \geq 12.$$

Angela Ţigăeru

IX.48 (nr. 1/2004, p.77). *Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a + b + c + \sqrt{abc} = 4$. Să se arate că*

$$\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt{ab}} \geq \frac{3}{2}.$$

Cezar Lupu

VII.17 (nr. 1/2001, p. 74). *a) Fie $x, y, z \in [2, \infty)$. Arătaţi că*

$$\left(x^2 + y\right)\left(y^2 + z\right)\left(z^2 + x\right) \geq 27xyz.$$

b) Fie $x, y, z \in [3, \infty)$. Arătaţi că $\left(x^2 + y\right)\left(y^2 + z\right)\left(z^2 + x\right) \geq 64xyz$.

Lucian Tuţescu

Soluţii ale acestor probleme pot fi găsite în numerele 2/2005, 1/2005 şi respectiv 1/2002 ale revistei.

Problema 1. *Date numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, \infty)$, $n \geq 2$, fie $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Să se arate că*

$$\log_{a_1}\left(2a_2^n + a_3^n + \cdots + a_n^n\right) + \log_{a_2}\left(a_1^n + 2a_3^n + \cdots + a_n^n\right) + \cdots + \log_{a_n}\left(2a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{n-1}^n\right) \geq \frac{n}{\log_n S - 1} + n^2,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \dfrac{S}{n}$.

Soluţie. Notăm cu E membrul stâng al inegalităţii. Utilizând inegalitatea mediilor, avem:

$$\begin{aligned}
E &\geq \log_{a_1}\left(na_2^2 a_3 \cdots a_n\right) + \log_{a_2}\left(na_1 a_3^2 \cdots a_n\right) + \cdots + \log_{a_n}\left(na_1^2 a_2 \cdots a_{n-1}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \log_{a_i} n + 2\left(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \cdots + \log_{a_n} a_1\right) + \\
&\quad + \left[\log_{a_1}(a_3 \cdots a_n) + \log_{a_2}(a_1 a_4 \cdots a_n) + \cdots + \log_{a_n}(a_2 \cdots a_{n-1})\right] \geq \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \log_{a_i} n + 2n + n\sqrt[n]{\log_{a_1}(a_3 \cdots a_n) \cdots \log_{a_n}(a_1 \cdots a_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Dar

$$\log_{a_1}(a_3 \cdots a_n) = \frac{\ln a_3 + \ln a_4 + \cdots + \ln a_n}{\ln a_1} \geq \frac{(n-2)\left(\ln a_3 \cdots \ln a_n\right)^{\frac{1}{n-2}}}{\ln a_1}.$$

---

[1] Elev, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "A. T. Laurian", Botoşani

Cu această inegalitate şi analoagele ei, vom avea

$$E \geq \sum_{i=1}^{n} \log_{a_i} n + 2n + n(n-2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\log_n a_i} + n^2 \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} \log_n a_i} + n^2 =$$

$$= \frac{n^2}{\log_n (a_1 a_2 \cdots a_n)} + n^2 \geq \frac{n^2}{\log_n \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^n} + n^2 = \frac{n}{\log_n S - 1} + n^2$$

şi astfel inegalitatea este dovedită. Cazul în care are loc egalitate se obţine cu uşurinţă.

Observaţie. Inegalitatea din Problema X.53 se obţine pentru $n = 3$ şi $S = 9$.

Problema 2. *Date numerele* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$, $n \geq 3$, *fie* $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. *Să se arate că*

$$\frac{a_1^2}{a_1 + k \sqrt[n-1]{a_2 a_3 \cdots a_n}} + \frac{a_2^2}{a_2 + k \sqrt[n-1]{a_1 a_3 \cdots a_n}} + \cdots +$$

$$+ \frac{a_n^2}{a_n + k \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}} \geq \frac{S - \left(\frac{S}{n+1} \right)^{1 + \frac{1}{n}}}{k+1},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ *şi* $S = n + 1$.

Soluţie. Notând cu E primul membru al inegalităţii şi utilizând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz şi cea a mediilor, obţinem

$$E \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{\sum \left(a_1 + k \sqrt[n-1]{a_2 a_3 \cdots a_n} \right)} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{\sum \left(a_1 + k \dfrac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n-1} \right)} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2}{(k+1) \sum_{i=1}^{n} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{k+1}. \tag{$*$}$$

Pe de altă parte, pornind de la $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ şi folosind din nou inegalitatea mediilor, vom avea

$$S \geq (n+1) \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n} a_i \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n} a_i}},$$

de unde

$$\left(\frac{S}{n+1} \right)^{n+1} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\dfrac{n}{n-1}}.$$

Ca urmare,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = S - \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq S - \left(\frac{S}{n+1} \right)^{\dfrac{n+1}{n}}.$$

Introducând în $(*)$, vom obţine inegalitatea din enunţ. Egalitate avem dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_n} = \dfrac{S}{n+1}$, adică $a_i = 1$, $i \in \mathbb{N}$ şi $S = n + 1$.

Observaţii. 1) Mai general, putem considera $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,\infty)$, $n \geq 3$, şi $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sqrt[p]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, $p \geq 3$; se va obţine

$$E \geq \frac{1}{k+1}\left[S - \left(\frac{S}{n+1}\right)^{\frac{p(n+1)}{p+1}}\right].$$

2) Pentru $n = 3$ şi $k = 1$ regăsim inegalitatea din Problema IX.48.

În privinţa Problemei VII.17, vom spune mai întâi că în nr. 1/2002, la pag. 66, sunt prezentate două demonstraţii pentru următoarea generalizare a acesteia:

Fie $x, y, z \in [n,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $\left(x^2 + y\right)\left(y^2 + z\right)\left(z^2 + x\right) \geq (n+1)^3\, xyz$.

O inegalitate şi mai generală este dată de

Problema 3. *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [k,\infty)$, $k, n \in \mathbb{N}^*$ şi $n \geq 2$. Arătaţi că*

$$\left(x_1^{n-1} + x_2\right)\left(x_2^{n-1} + x_3\right)\cdots\left(x_n^{n-1} + x_1\right) \geq (k+1)^n \left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{k(n-2)+1}{k+1}},$$

Cu egalitate dacă şi numai dacă $x_i = k = 1$, $i = \overline{1,n}$, sau $x_i = k$, $n = 3$, $i = \overline{1,3}$.

Soluţie. Să notăm din nou cu E membrul întâi al inegalităţii de demonstrat. Observăm că $x_1 \geq k$ implică $x_1^{n-1} \geq k x_1^{k-2}$ şi

$$x_1^{n-1} + x_2 \geq k x_1^{n-2} + x_2 = \underbrace{x_1^{n-2} + x_1^{n-2} + \cdots + x_1^{n-2}}_{k} + x_2.$$

Deci $x_1^{n-2} + x_2 \geq (k+1)\sqrt[k+1]{x_1^{k(n-2)} x_2}$. Utilizând această inegalitate şi analoagele ei, obţinem că

$$E \geq (k+1)^n \sqrt[k+1]{x_1^{k(n-2)+1} x_2^{k(n-2)+1} \cdots x_n^{k(n-2)+1}} = (k+1)^n \left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{k(n-2)+1}{k+1}},$$

cu egalitate aşa cum este specificat în enunţ.

Observaţie. Inegalităţile din Problema VII.17 se obţin pentru $k = 2$, $n = 3$ şi respectiv $k = 3$, $n = 3$, iar generalizarea lor, dată în revistă, pentru $n = 3$.

Recreaţii ... matematice

Când se naşte, omul zice $AA\ldots$. Când moare, zice $MOR\ldots$. Aşadar, intervalul vieţii este $[A, MOR]$, adică $AMOR$.
