NOTA ELEVULUI

Principiul cutiei şi aplicaţii

Bogdan CIACOI[1]

Există probleme de matematică care pot fi abordate cu mijloacele gândirii cotidiene, dar care necesită multă imaginaţie şi ingeniozitate. Un exemplu de acest fel sunt problemele care pot fi rezolvate utilizând *principiul cutiei* sau *principiul lui Dirichlet.* Acest principiu se formulează în felul următor:

Dacă n obiecte se repartizează în m cutii şi $n > m$, atunci cel puţin o cutie conţine mai mult decât un obiect.

Prezentăm câteva probleme ce ilustrează aplicarea acestui principiu. Avem în vedere nu numai utilitatea unui astfel de subiect, ci şi faptul că anul acesta se împlinesc **200 de ani** de la naşterea marelui matematician **J. P. G. Lejeune-Dirichlet.**

1. *Să se demonstreze ca pentru orice număr impar a se găseşte un număr natural b astfel încât $2^b - 1$ să se dividă prin a.* ([**2**], *Problema 11*, p. 58)

Soluţie. Fie numerle $2^0 - 1$, $2^1 - 1$, ... , $2^a - 1$. Prin împărţirea la a a acestor $a + 1$ numere se vor obţine a resturi. Conform principiului lui Dirichlet rezultă că există cel puţin două numere ce dau acelaşi rest. Fie ele $2^k - 1$ şi $2^m - 1$ cu $k < m$. Ca urmare, numărul $\left(2^k - 1\right) - (2^m - 1) = 2^k\left(2^{m-k} - 1\right)$ se divide prin a. Cum a este impar rezultă că $2^{m-k} - 1$ se divide prin a. Aşadar putem lua $b = m - k$.

2. *Într-un cub cu latura de lungime* 1 *sunt situate* $n^3 + 1$ *puncte distincte. Să se demonstreze că printre aceste puncte există două la distanţă mai mică sau cel mult egală cu $\sqrt{3}/n$.*

Soluţie. Împărţim muchiile cubului în n părţi de lungimi egale şi apoi împărţim cubul (într-un mod evident) în n^3 cubuleţe. Conform principiului lui Dirichlet, există un cubuleţ ce conţine în interior sau pe feţe două din cele $n^3 + 1$ puncte date. Distanţa dintre aceste puncte este cel mult egală cu lungimea diagonalei cubuleţului, adică $\sqrt{3}/n$. Să observăm că, dacă punctele sunt luate în interiorul cubului, atunci numărul $\sqrt{3}/n$ nu poate fi cea mai mică dintre distanţele rezultate.

3. *Se consideră zece numere naturale de câte două cifre (scrise în baza zece). Să se demonstreze că din aceste numere se pot forma două grupe nevide şi distincte astfel încât sumele numerelor din fiecare grupă să fie egale.* (*O.I.M.*, 1972)

Soluţie. Numărul de grupe distincte care sunt nevide şi diferite de mulţimea celor zece numere date este $C_{10}^1 + C_{10}^2 + \cdots + C_{10}^9 = 2^{10} - 2 = 1022$. Suma numerelor din oricare dintre aceste grupe este cuprinsă între 10 şi $99 + 98 + \cdots + 91 = 855$. Ca urmare, există două grupe ce au proprietatea cerută în enunţul problemei.

4. *Pe un satelit sferic de rază* 2 *sunt amplasate* 9 *staţii de emisie-recepţie. Demonstraţi că există două staţii pe satelit aflate la o distanţă ce nu depăşeşte π.* (*Concursul "Fl. T. Câmpan"*, 2002).

Soluţie. Cu ajutorul a trei cercuri mari, situate în plane două câte două perpendiculare, împărţim suprafaţa sferei în 8 sectoare. Există două puncte situate într-un

[1] Elev, cl. a X-a, Liceul Teoretic "Ana Ipătescu", Gherla (Cluj)

acelaşi sector, iar distanţa între ele nu va putea depăşi un sfert din lungimea unui cerc mare, deci nu va fi mai mare decât π.

5. *Să se arate că orice număr natural relativ prim cu* 10 *admite un multiplu care se scrie folosind numai cifra* 3. (**Lucian-Georges Lăduncă**, *Problema VI.49*, RecMat - 1/2004).

Soluţie. Dacă $n \in \mathbb{N}$ cu $(n, 10) = 1$, "cutiile" vor fi resturile modulo n şi în ele vom aşeza numerele 3, 33, 333, ... , $\underbrace{\overline{33\ldots3}}_{n+1}$. Astfel, vor exista două numere cu acelaşi rest la împărţirea prin n şi atunci n va divide diferenţa lor, care este de forma $\overline{33\ldots3} \cdot 10^k$. Deoarece $\left(n, 10^k\right) = 1$, urmează că $n \mid \overline{33\ldots3}$, de unde concluzia.

Observaţie. Dacă în locul numerelor 3, 33, 333, ... am fi considerat numerele 1, 11, 111, ... , cu exact acelaşi raţionament am fi obţinut că n admite un multiplu care se scrie folosind numai cifra 1. Dacă $n \mid A$, atunci $n \mid aA$, $\forall a \in \mathbb{N}$, prin urmare n va admite un multiplu care se scrie numai cu ajutorul cifrei a, pentru orice $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

6. *Trei elevi scriu câte un număr de* 2001 *cifre:* $A = \overline{a_{2001}a_{2000}\ldots a_2a_1}$, $B = \overline{b_{2001}b_{2000}\ldots b_2b_1}$, $C = \overline{c_{2001}c_{2000}\ldots c_2c_1}$. *Să se arate că în scrierea acestor numere există trei poziţii* m, n, p *astfel încât* $a_m = a_n = a_p$, $b_m = b_n = b_p$, $c_m = c_n = c_p$. (**Gabriel Popa**, *Problema G1*, RecMat - 2/2001).

Soluţie. În RecMat 2/2002 este prezentată o soluţie a acestei probleme; vom da în continuare o altă soluţie. Există 10 cifre şi, cum numărul A se scrie cu 2001 cifre, conform principiului cutiei vor fi măcar 201 cifre egale. În numărul B, urmărim numai cele 201 cifre aflate pe aceleaşi poziţii cu cifrele egale ale lui A; aplicând iar principiul cutiei, printre cele 201 cifre vor exista 21 de cifre egale. În C, urmărim cele 21 cifre aflate pe aceleaşi poziţii cu cifrele egale ale lui B; printre ele, vor exista măcar 3 cifre egale. Pe poziţiile acestor trei cifre, atât în B cât şi în A avem cifre egale şi rezolvarea este încheiată.

7. *Să se arate că oricum am alege* 51 *de numere naturale distincte între* 1 *şi* 100, *există printre ele două* a, b *astfel încât* $a \mid b$. (*Concursul "Fl. T. Câmpan"*, 2004).

Soluţie. Avem de-a face cu o problemă dificilă, în care este foarte greu să alegem bine "cutiile". Vom proceda astfel: partiţionăm $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ ca $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{50}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, considerând

$$A_i = \left\{(2i-1) \cdot 2^k \mid k \in \mathbb{N}, (2i-1) \cdot 2^k \leq 100\right\}.$$

Mai clar, $A_1 = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$, $A_2 = \{3, 6, 12, 24, 48, 96\}$, $A_3 = \{5, 10, 20, 40, 80\}$, ..., $A_{49} = \{97\}$, $A_{50} = \{99\}$. Cum sunt date 51 de numere, măcar două se vor afla într-o mulţime A_p (bineînţeles, una care are măcar două elemente). Cum într-o mulţime A_p, oricare ar fi o pereche de elemente, cel mai mic îl divide pe cel mai mare, obţinem concluzia.

Bibliografie

1. *Recreaţii Matematice*, Colecţia din perioada 1999-2005.
2. A. Ghioca, N. Teodorescu - *Matematica în gimnaziu şi lice*u, III/10, Buc., 1987.
3. E. A. Morozova, I. S. Petrakov, V. A. Skvorţov - *Olimpiadele internaţionale de matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1978.