NOTA ELEVULUI

Asupra unei inegalităţi

Alexandru NEGRESCU[1]

La a V-a ediţie a *Concursului interjudeţean de matematică "Radu Miron"*, noiembrie 2003, elevilor clasei a IX-a li s-a propus următoarea problemă:

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (2, +\infty)$ *astfel încât* $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\cdots+\frac{1}{x_n-1}=1$. *Demonstraţi că* $x_1 \cdot x_2 \cdot \ \ldots\ \cdot x_n \geq (n+1)^n$.

Vom da 5 demonstraţii acestei inegalităţi.

Soluţia I. Notăm $x_i - 1 = a_i$, $i=\overline{1,n}$; deci $a_i > 1$. Aplicăm inegalitatea lui Huygens:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)^n, \quad \forall a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0.$$

Obţinem

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ \ldots\ \cdot x_n \geq \left(1+\sqrt[n]{(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)}\right)^n. \tag{1}$$

Dar, conform cu inegalitatea dintre mediile armonică şi geometrică, avem

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\cdots+\frac{1}{x_n-1}} \leq \sqrt[n]{(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)}$$

sau, ţinând seama de condiţia din enunţ,

$$n \leq \sqrt[n]{(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $x_1 \cdot x_2 \cdot \ \ldots\ \cdot x_n \geq (1+n)^n$, q.e.d.

Soluţia II. Scriem

$$x_i = 1 + (x_i - 1) = 1 + \frac{x_i-1}{n} + \frac{x_i-1}{n} + \cdots + \frac{x_i-1}{n} \geq (n+1)\sqrt[n+1]{\left(\frac{x_i-1}{n}\right)^n}.$$

Ca urmare,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq (n+1)^n \sqrt[n+1]{\frac{(x_1-1)^n (x_2-1)^n \cdots (x_n-1)^n}{n^{n^2}}}. \tag{3}$$

Din (2), avem $(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1) \geq n^n$, deci

$$\sqrt[n+1]{\frac{(x_1-1)^n (x_2-1)^n \cdots (x_n-1)^n}{n^{n^2}}} \geq 1. \tag{4}$$

Combinând (3) şi (4), obţinem inegalitatea cerută.

Soluţia III. Notăm $\frac{1}{x_i-1} = y_i$, $i=\overline{1,n}$; deci $y_i \in (0,1)$ şi $y_1+y_2+\cdots+y_n=1$. Rezultă că $x_i = \frac{y_i+1}{y_i}$, $\overline{1,n}$ şi avem:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ \ldots\ \cdot x_n = \frac{y_1+1}{y_1} \cdot \frac{y_2+1}{y_2} \cdot \ \ldots\ \cdot \frac{y_n+1}{y_n} =$$

[1] Elev, cl. a IX-a, Colegiul Naţional "A. T. Laurian", Botoşani

$$= \frac{2y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{y_1} \cdot \frac{y_1 + 2y_2 + \cdots + y_n}{y_2} \cdot \ldots \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + 2y_n}{y_n} \geq$$

$$\geq \frac{(n+1)^n \sqrt[n+1]{(y_1 y_2 \cdots y_n)^{n+1}}}{y_1 y_2 \cdots y_n} = (n+1)^n .$$

Soluţia IV. Apelăm la *metoda lui Sturm.* Deoarece $x_i = \left(1 + \frac{1}{x_i - 1}\right) / \frac{1}{x_i - 1}$, $i = \overline{1, n}$, inegalitatea de demonstrat se scrie

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{x_i - 1}\right)\right] \Big/ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - 1} \geq (n+1)^n . \tag{5}$$

Să analizăm comportarea produsului $\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+b}{b}$, cu $a, b > 0$ şi $a + b$ este constantă subunitară, atunci când a şi b "se apropie". Presupunem $a < b$ şi înlocuim numerele a şi b cu $a + t$ şi respectiv $b - t$, unde $0 < t < b - a$. Atunci

$$\frac{1+a+t}{a+t} \cdot \frac{1+b-t}{b-t} - \frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+b}{b} = \frac{t(1+a+b)(a-b+t)}{ab(a+t)(b-t)} < 0,$$

ceea ce arată că apropiind numerele a şi b produsul $\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+b}{b}$ descreşte.

Dacă printre numerele $\frac{1}{x_1 - 1}, \frac{1}{x_2 - 1}, \ldots, \frac{1}{x_n - 1}$ există două inegale, atunci unul este strict mai mic ca $\frac{1}{n}$ şi celălalt este strict mai mare ca $\frac{1}{n}$; fie $\frac{1}{x_1 - 1} < \frac{1}{n}$ şi $\frac{1}{x_2 - 1} > \frac{1}{n}$. Înlocuim $\frac{1}{x_1 - 1}$ şi $\frac{1}{x_2 - 1}$ prin $\frac{1}{n}$ şi respectiv $\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} - \frac{1}{n}$. Suma numerelor $\frac{1}{n}, \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} - \frac{1}{n}, \frac{1}{x_3 - 1}, \ldots, \frac{1}{x_n - 1}$ rămâne aceeaşi, dar membrul stâng în (5), obţinut prin această înlocuire, este mai mic. În noul set de numere avem unul egal cu $\frac{1}{n}$, iar, dacă printre celelalte există două inegale, se procedează la fel până când se obţine un set de numere egale cu $\frac{1}{n}$. În acest caz membrul stâng are valoare minimă, anume,

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Big/ \frac{1}{n}\right]^n = (n+1)^n .$$

Soluţia V. Vom dovedi mai întâi rezultatul următor:
Lemă. *Dacă* $a_i, b_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, *atunci*

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} . \tag{6}$$

Demonstraţie. Inegalitatea se poate scrie astfel:

$$1 \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_n + b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1 + b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{a_n + b_n}}$$

şi rezultă aplicând inegalitatea mediilor:

$$1=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)+\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)\right]\geq$$

$$\geq\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_n+b_n}}+\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdot\ldots\cdot\frac{b_n}{a_n+b_n}}.$$

Luând în (6) $a_i=x_i-1$ şi $b_i=1$, $i=\overline{1,n}$, obţinem

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\geq\sqrt[n]{(x_1-1)(x_2-2)\cdots(x_n-1)}+1\overset{(2)}{\geq}n+1,$$

de unde rezultă inegalitatea dorită.

Observaţie. Această problemă poate fi uşor generalizată astfel:

Fie $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(2,+\infty)$ *astfel încât* $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\cdots+\frac{1}{x_n-1}=k$. *Demonstraţi că* $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\geq\left(\frac{k+n}{k}\right)^n$.

Bibliografie

1. **Gh. Andrei şi colab.** - *Exerciţii şi probleme de algebră pentru concursuri şi olimpiade şcolare*, Partea I, Constanţa, 1990.
2. **M. Ganga** - *Manual pentru clasa a IX-a, Profil M1,M2*, Ed. Mathpress, Ploieşti, 2003.
3. **M. Ganga** - *Probleme elementare de matematică*, v. II, Ed. Mathpress, Ploieşti, 2003.
4. **D. Şt. Marinescu, V. Cornea** - *Două inegalităţi şi unele aplicaţii ale acestora*, Gazeta Matematică, CVI (2001), nr. 3, 102-104.
5. **I. Nedelcu** - *Probleme de matematică pentru liceu*, Ed. Mathpress, Ploieşti, 2003.
6. **L. Panaitopol, M. Lascu, V. Băndilă** - *Inegalităţi*, Ed. GIL, Zalău, 1996.

Recreaţii ... matematice

1 (Problema de cântărire a lui Bachet). Care este cel mai mic număr de greutăţi care pot fi folosite pentru a cântări cu o balanţă ori număr întreg de kilograme de la 1 la 40?

2. Găsiţi două numere care se scriu în baza 10 numai cu ajutorul cifrei 1 şi care au suma egală cu produsul lor.

3. Un urs pleacă din bârlogul său 1 km spre sud, se întoarce şi parcurge 1 km spre est, apoi 1 km spre nord, revenind astfel în punctul de plecare. Ce culoare are ursul?

Notă. Răspunsurile la aceste probleme se găsesc la p. 110 şi la p. 123