Asupra problemei VII.41 din RecMat - 2/2003

În nr. 2/2003 al revistei *Recreaţii matematice* este publicată următoarea problemă, propusă de elevul **Alexandru Negrescu** din Botoşani:

VII.41. *Rezolvaţi în* $\mathbb{N}^2$ *ecuaţia* $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{a+1}=1.$

Această problemă a fost apoi propusă elevilor de cl. a VII-a în cadrul *Concursului "Recreaţii matematice"*, ediţia a III-a, 2003, Iaşi.

Aceste împrejurări, cât şi accesibilitatea problemei, au făcut ca aceasta să se bucure de atenţia elevilor. Ca rezultat, au fost date mai multe soluţii distincte sau variante ale lor. Nota de faţă colectează aceste soluţii. Cititorul va observa entuziasmul şi pasiunea cu care elevii au atacat problema VII.41.

Soluţia I (**Alexandra Ciofu**, elevă, Hârlău). Dacă perechea (a,b) este soluţie a ecuaţiei, atunci $\dfrac{a}{b+1}\leq 1$ şi $\dfrac{b}{a+1}\leq 1$, de unde $a\leq b+1$ şi $b\leq a+1$.

I Dacă $a\geq b$, rezultă că $0\leq a-b\leq 1$, deci $a-b\in\{0,1\}$. În cazul $a-b=0$, urmează $a=b$ şi, deoarece (a,b) este soluţie, $\dfrac{2a}{a+1}=1$. De aici, obţinem $a=1$ şi, deci, perechea $(1,1)$ va fi soluţie a ecuaţiei date. În cazul $a-b=1$, înlocuind în ecuaţia dată pe a cu $b+1$ obţinem $1+\dfrac{b}{b+2}=1$, deci $b=0$. Aşadar, în acest caz obţinem soluţia $(1,0)$.

II Dacă $a\leq b$, rolurile numerelor a şi b se schimbă şi (a,b) va fi $(1,1)$ sau $(0,1)$.

Rezumând, mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este $\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

Soluţia II (**Maria Crăciun**, elevă, Hunedoara). Ecuaţia dată este echivalentă cu $a(a+1)+b(b+1)=(a+1)(b+1)$, deci cu $a^2-ab+b^2=1$. Aceasta din urmă poate fi scrisă sub forma $a(a-b)-b(a-b)=1-ab$ sau $(a-b)^2=1-ab$. Aşadar, numărul $1-ab$ este un pătrat perfect cel mult egal cu 1, dacă perechea (a,b) este soluţie a ecuaţiei. Ca urmare, $1-ab\in\{0,1\}$, adică $ab\in\{0,1\}$.

Dacă $ab=1$, atunci perechea (a,b) va fi $(1,1)$ şi aceasta verifică ecuaţia.

Dacă $ab=0$, atunci $a=0$ sau $b=0$. Dacă $a=0$, înlocuind în ecuaţie obţinem $b=1$; perechea $(0,1)$ verifică ecuaţia din enunţ. Dacă $b=0$, obţinem în mod asemănător soluţia $(1,0)$. Dacă $a=0$ şi $b=0$, verificăm că perechea $(0,0)$ nu-i soluţie.

În concluzie, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

Soluţia III (**Bogdan-Alexandru Burican**, elev, Hârlău). Ecuaţia este echivalentă cu $a^2-ab+b^2=1$ şi apoi cu $a^2+b^2+(a-b)^2=2$. Rezultă că $a^2\leq 2$, deci $a\in\{0,1\}$.

Dacă $a=0$, din ecuaţia dată obţinem $b=1$.

Dacă $a=1$, din relaţia $a^2-ab+b^2=1$ obţinem $b^2-b=0$, de unde $b=0$ sau $b=1$.

Prin urmare, perechile $(0,1)$, $(1,0)$ şi $(1,1)$ sunt soluţiile ecuaţiei date.

Soluţia IV (**Diana Prodan**, elevă, Iaşi). Ecuaţia $a^2-ab+b^2=1$, echivalentă cu ecuaţia din enunţul problemei, se pune în forma $3a^2+(a-2b)^2=4$. De aici, avem $3a^2 \leq 4$, deci $a \in \{0,1\}$. Se continuă ca în Soluţia III.

Soluţia V (**Adrian Hamciuc**, elev, Iaşi). Ca mai sus, obţinem ecuaţia $a^2-ab+b^2=1$. Cum $a^2+b^2 \geq 2ab$, rezultă că $ab \leq 1$, adică $ab \in \{0,1\}$. Se încheie ca în Soluţia II.

Soluţia VI (**Diana Timofte**, elevă, Iaşi). Fie (a,b) o soluţie a ecuaţiei date, deci şi a ecuaţiei $a^2-ab+b^2=1$. Ca urmare, ecuaţia $b^2-ab-\left(a^2-1\right)=0$, considerată în b, are soluţii reale şi atunci $\Delta=a^2-4\left(a^2-1\right) \geq 0$. Rezultă că $3a^2 \leq 4$, deci $a \in \{0,1\}$. Se continuă ca în Soluţia III.

Soluţia VII (**Alexandru Negrescu**, elev, Botoşani). Conform inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz, avem

$$[(b+1)+(a+1)]\left(\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}\right) \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2,$$

de unde $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \leq (b+1)+(a+1)$, adică $a+b+2\sqrt{ab} \leq a+b+2$ sau $\sqrt{ab} \leq 1$. De aici $ab \in \{0,1\}$ etc.

Observaţie. Soluţiile prezentate mai sus au comun faptul că în prima parte se obţine, cu tehnici diverse de calcul, una dintre relaţiile $a \in \{0,1\}$, $a-b \in \{0,1\}$, $ab \in \{0,1\}$. În partea a doua sunt utilizate aceste relaţii (una dintre ele) pentru determinarea mulţimii soluţiilor ecuaţiei.

Recreaţii ... matematice

Soluţia *Problemei de cântărire a lui Bachet* (p. 108)

Dacă greutăţile se pun pe un singur taler, sunt necesare şase greutăţi: 1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg, 32 kg. Într-adevăr, orice greutate de la 1 la 40 poate fi atinsă astfel:

$$\begin{array}{ll} 1=1, & 6=4+2, \\ 2=2, & \dots\dots\dots \\ 3=2+1, & \dots\dots\dots \\ 4=4, & 39=32+4+2+1, \\ 5=4+1, & 40=32+8. \end{array}$$

Dacă greutăţile pot fi puse pe ambele talere, sunt necesare numai patru greutăţi: 1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg. Într-adevăr, avem:

$$\begin{array}{ll} 1=1, & 6=9-3, \\ 2=3-1, & \dots\dots\dots \\ 3=3, & \dots\dots\dots \\ 4=3+1, & 39=27+9+3, \\ 5=9-3-1, & 40=27+9+3+1. \end{array}$$