Combinatorică ... algebrică

Gabriel DOSPINESCU[1]

Expansiunea combinatoricii în concursurile de matematică de orice nivel impune cunoaşterea unor procedee şi metode cât mai variate de abordare a problemelor de acest fel. Scopul acestei note este prezentarea, pe un număr de exemple, a modului cum pot fi utilizate unele mijloace algebrice: numere complexe, polinoame etc. în rezolvarea problemelor de combinatorică.

Cardinalul unei mulţimi A va fi notat $|A|$. Dacă A este o mulţime de numere naturale, atunci suma elementelor acesteia se notează $m(A)$ şi se numeşte *măsura lui* A (prin convenţie, $m(\emptyset) = 0$). Mulţimea A se numeşte pară / impară dacă $m(A)$ este număr par / impar ($\emptyset$ este pară).

Vom utiliza în mod frecvent următoarea

Lemă. *Fie* $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. *Are loc egalitatea*

$$a_0 + a_1\varepsilon + \ldots + a_{n-1}\varepsilon^{n-1} = 0, \quad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R},$$

dacă şi numai dacă $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1}$.

Demonstraţie. Definim polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$ prin $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$ şi $g = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$. Dacă f, g au rădăcini comune, atunci (f, g) divide g. Deoarece g este ireductibil în $\mathbb{R}[X]$, rezultă $(f, g) = g$, adică $g \mid f$, şi, deci, $g = kf$, $k \in \mathbb{R}$. În consecinţă, avem $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1}$. Reciproca este evidentă.

1. *Câte numere de* n *cifre* 2, 3, 7 *sau* 9 *se divid cu* 3? **(Concursul "Traian Lalescu", 2003)**

Soluţie. Fie x_n, y_n şi z_n numărul numerelor cu n cifre 2, 3, 7 sau 9 congruente cu 0, 1 şi respectiv 2 modulo 3. Se cere să se afle x_n. Fie $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$. Evident, $x_n + y_n + z_n = 4^n$ şi $x_n + \varepsilon y_n + \varepsilon^2 z_n = \displaystyle\sum_{a_1,\ldots,a_n \in \{2,3,7,9\}} \varepsilon^{a_1+\ldots+a_n} = \left(\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^7 + \varepsilon^9\right)^n = 1$. Deci $x_n - 1 + \varepsilon y_n + \varepsilon^2 z_n = 0$, de unde rezultă că $x_n - 1 = y_n = z_n = k$. Atunci $3k = x_n + y_n + z_n - 1 = 4^n - 1$, de unde $k = \dfrac{1}{3}(4^n - 1)$. Ca urmare, $x_n = \dfrac{1}{3}(4^n + 2)$.

2. *Fie* $S_n = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ *şi* $\mathcal{A}_n$ $(\mathcal{B}_n)$ *familia submulţimilor pare (impare) ale mulţimii* S_n, *având* n *elemente. Să se determine* $|\mathcal{A}_n| - |\mathcal{B}_n|$. **(Polonia, 2001)**

Soluţie. Ideea esenţială este că avem $|\mathcal{A}_n| - |\mathcal{B}_n| = \displaystyle\sum_{A \subset S_n,\ |A| = n} (-1)^{m(A)}$. Dar ultima expresie este coeficientul lui X^n în dezvoltarea $\displaystyle\prod_{i=1}^{2n}\left[1 + (-1)^i X\right]$. Cum acest

[1] Elev, Liceul "Dimitrie Cantemir", Oneşti

produs este egal cu $(1+X)^n(1-X)^n = \left(1-X^2\right)^n$, deducem că $|\mathcal{A}_n|-|\mathcal{B}_n|$ este coeficientul lui X^n în dezvoltarea $\left(1-X^2\right)^n$, adică este 0 pentru n impar şi $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$ pentru n par.

3. *Fie p un număr prim impar, numerele naturale m şi n divizibile cu p, iar n impar. Pentru fiecare m -uplă $(c_1,\ldots,c_m)$, unde $c_i\in\{1,2,\ldots,n\}$, cu proprietatea că $p \mid \sum_{i=1}^{m} c_i$, considerăm produsul $c_1\cdot\ldots\cdot c_m$. Să se demonstreze că suma acestor produse este divizibilă cu $\left(\frac{n}{p}\right)^m$.* (**Gabriel Dospinescu**)

Soluţie. Pentru orice $k\in\{0,1,\ldots,p-1\}$, fie $x_k=\sum c_1\cdot\ldots\cdot c_m$, suma luându-se după toate m-uplele $(c_1,\ldots,c_m)$ pentru care $\sum_{i=1}^{m} c_i\equiv k \pmod p$. Luând $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$, avem

$$\left(\varepsilon+2\varepsilon^2+\ldots+n\varepsilon^n\right)^m=\sum_{c_1,\ldots,c_m\in\{1,2,\ldots,n\}} c_1\cdot\ldots\cdot c_m\varepsilon^{c_1+\ldots+c_m}=\sum_{k=0}^{p-1}x_k\varepsilon^k.$$

Cum, printr-un calcul simplu, se obţine

$$\varepsilon+2\varepsilon^2+\ldots+n\varepsilon^n=\frac{n\varepsilon^{n+2}-(n+1)\,\varepsilon^{n+1}+\varepsilon}{(\varepsilon-1)^2}=\frac{n\varepsilon}{\varepsilon-1},$$

rezultă că

$$\frac{n^m}{(\varepsilon-1)^m}=\sum_{k=0}^{p-1}x_k\varepsilon^k. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, din $\varepsilon^{p-1}+\ldots+\varepsilon+1=0$ deducem că

$$\frac{1}{\varepsilon-1}=-\frac{1}{p}\left(\varepsilon^{p-2}+2\varepsilon^{p-3}+\ldots+(p-2)\,\varepsilon+p-1\right)$$

şi obţinem

$$\frac{n^m}{(\varepsilon-1)^m}=\left(-\frac{n}{p}\right)^m\left(\varepsilon^{p-2}+2\varepsilon^{p-3}+\ldots+(p-2)\,\varepsilon+p-1\right)^m.$$

Scriind

$$\left(X^{p-2}+2X^{p-3}+\ldots+(p-2)\,X+(p-1)\right)^m=b_0+b_1X+\ldots+b_{m(p-2)}X^{m(p-2)},$$

deducem că

$$\frac{n^m}{(\varepsilon-1)^m}=\left(-\frac{n}{p}\right)^m\left(y_0+y_1\varepsilon+\ldots+y_{p-1}\varepsilon^{p-1}\right), \qquad (2)$$

unde $y_j=\sum_{k\equiv j \pmod p} b_k$.

Din (1) şi (2), obţinem relaţia

$$x_0-ry_0+(x_1-ry_1)\,\varepsilon+(x_2-ry_2)\,\varepsilon^2+\ldots+(x_{p-1}-ry_{p-1})\,\varepsilon^{p-1}=0,$$

unde $r = \left(-\dfrac{n}{p}\right)^m$. Din aceasta rezultă că $x_0 - ry_0 = \ldots = x_{p-1} - ry_{p-1} = k$. Rămâne să arătăm că $r \mid x_0$. Este suficient să arătăm că $r \mid k$. Dar

$$\begin{aligned} pk &= x_0 + \ldots + x_{p-1} - r\left(y_0 + \ldots + y_{p-1}\right) = \\ &= (1 + 2 + \ldots + n)^m - r\left(b_0 + \ldots + b_{m(p-2)}\right) = \\ &= (1 + 2 + \ldots + n)^m - r\left(1 + 2 + \ldots + (p-1)\right)^m . \end{aligned}$$

Deci $pk = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^m - r\left(\dfrac{p(p-1)}{2}\right)^m$ şi, cum membrul drept se divide cu pr, rezultă că $r \mid k$.

4. *Fie $n, a_1, a_2, \ldots, a_m \in N^*$ şi $f(k)$ numărul m-uplelor $(c_1, \ldots, c_m)$ pentru care $1 \le c_i \le a_i$ şi $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i \equiv k \pmod n$. Să se arate că $f(0) = f(1) = \ldots = f(n-1)$ dacă şi numai dacă există un indice i astfel încât $n \mid a_i$.* **(Rookie Contest, 1999)**

Soluţie. Să observăm că au loc relaţiile

$$\prod_{i=1}^{m}\left(X + X^2 + \ldots X^{a_i}\right) = \sum_{1 \le c_i \le a_i} X^{c_1+c_2+\ldots+c_m} \quad \text{şi}$$

$$f(0) + f(1)\varepsilon + \ldots + f(n-1)\varepsilon^{n-1} = \sum_{1 \le c_i \le a_i} \varepsilon^{c_1+\ldots+c_m} = \prod_{i=1}^{m}\left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{a_i}\right),$$

unde am notat în mod firesc $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Atunci $f(0) = f(1) = \ldots = f(n-1)$ este echivalent cu $f(0) + f(1)\varepsilon + \ldots + f(n-1)\varepsilon^{n-1} = 0$, deci cu $\prod\limits_{i=1}^{m}\left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{a_i}\right) = 0$. Ultima realţie are loc dacă şi numai dacă există un indice i astfel încât $\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{a_i} = 0$ şi, ca urmare, $\varepsilon^{a_i} = 1$, adică $n \mid a_i$.

5. *Fie p un număr prim şi $A = \{1, 2, \ldots, 2p\}$. Să se determine numărul mulţimilor $B \subset A$ cu p elemente şi având proprietatea că $p \mid m(B)$.* **(OIM - 1995, Polonia)**

Soluţie. Cazul $p = 2$ fiind banal, vom considera $p \ge 3$. Fie $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ şi x_j numărul mulţimilor $B \subset A$ cu p elemente şi pentru care $m(B) \equiv j \pmod p$. Atunci

$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j\varepsilon^j = \sum_{B \subset A,\ |B| = p} \varepsilon^{m(B)} = \sum_{1 \le c_1 \le \ldots \le c_p \le 2p} \varepsilon^{c_1+\ldots+c_p},$$

ultima sumă fiind coeficientul lui X^p în dezvoltarea $(X + \varepsilon)\left(X + \varepsilon^2\right)\ldots\left(X + \varepsilon^{2p}\right)$. Cum $X^p - 1 = (X - 1)(X - \varepsilon)\ldots\left(X - \varepsilon^{p-1}\right)$, deducem că $(X + \varepsilon)\left(X + \varepsilon^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(X + \varepsilon^{2p}\right) = (X^p + 1)^2$ şi, deci, coeficientul lui X^p este 2. Aşadar, $\sum\limits_{j=0}^{p-1} x_j\varepsilon^j = 2$ sau

$x_0 - 2 + x_1\varepsilon + \ldots + x_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$, de unde rezultă că $x_0 - 2 = x_1 = \ldots = x_{p-1} = k$. Urmează că $pk = x_0 + \ldots + x_{p-1} - 2 = \binom{2p}{p} - 2$. În concluzie, $x_0 = 2 + \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right)$.

6. *Fie A o mulţime de numere naturale ce conţine cel puţin două numere impare. Să se arate că pentru $k \in \{0,1,2\}$ are loc relaţia $\sum\limits_{B\subset A} (-1)^{m(B)}\, m^k(B) = 0$ (B poate fi $\emptyset$ sau A).* **(Gabriel Dospinescu)**

Soluţie. Pornim de la observaţia că

$$\prod_{a\in A}(1+X^a) = \sum_{B\subset A} X^{m(B)}. \tag{1}$$

În (1) facem $x=-1$ şi deducem că $\sum\limits_{B\subset A}(-1)^{m(B)} = \prod\limits_{a\in A}(1+(-1)^a) = 0$. Derivăm relaţia (1) şi obţinem (notând $A = \{a_1, ..., a_p\}$)

$$\sum a_1 X^{a_1}(1+X^{a_2})\ldots(1+X^{a_p}) = \sum_{B\subset A} m(B)X^{m(B)}. \tag{2}$$

În (2) facem $x=-1$ şi deducem (ţinând cont că din ipoteză fiecare termen al sumei din membrul stâng este 0) că $\sum\limits_{B\subset A} m(B)(-1)^{m(B)} = 0$. Derivăm apoi (2) şi obţinem analog că $\sum\limits_{B\subset A}(-1)^{m(B)}m^2(B) = 0$.

În final propunem spre rezolvare pe aceeaşi cale problemele următoare. Pentru a realiza că această metodă merită să fie cunoscută, sugerăm ca atât problemele anterioare cât şi cele următoare să fie rezolvate şi "clasic".

7. *Fie a_n numărul submulţimilor $B \subset \{1,2,...,6n\}$ pentru care $m(B) \equiv 5 \pmod 6$ şi b_n numărul submulţimilor $C \subset \{1,2,...,7n\}$ pentru care $\prod\limits_{x\in C} x \equiv 5 \pmod 7$. Să se determine $\frac{a_n}{b_n}$.* **(Polonia)**

8. *Să se calculeze suma elementelor submulţimilor lui $\{1,2,...,3n\}$ care au măsura multiplu de 3.* **(Gabriel Dospinescu)**

9. *Fie $A = \{1,2,..,n\}$. a) Să se arate că familiile submulţimilor pare şi impare ale lui A au acelaşi număr de elemente şi aceeaşi sumă a măsurilor elementelor.*

b) Să se afle suma măsurilor submulţimilor pare ale lui A. **(Test de selecţie, 1994)**

Un procedeu de calcul al limitelor unor şiruri de forma $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$

Oana CÂRJĂ[1]

1. Scopul acestei note este prezentarea unei scheme de calcul al limitelor unor şiruri de forma $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$, schemă desprinsă din soluţia dată de *M. Ţena* relativ la *şirul lui Lalescu* [**1**, p. 443].

Baza teoretică a acestei scheme este dată de următoarea

Propoziţie. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere strict pozitive ce verifică condiţiile:*

$$(i)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1; \quad (ii)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \alpha \in (0,\infty)\,; \quad (iii)\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \beta \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = \alpha \ln \beta$.

Demonstraţie. Avem:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}}\right]^{\frac{n}{a_n}(a_{n+1} - a_n)}, \ n \geq 1,$$

de unde, prin logaritmare, obţinem:

$$(a_{n+1} - a_n) \ln \left(1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}} = \frac{a_n}{n} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n, \ n \geq 1. \tag{1}$$

Din (i) rezultă imediat că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = 0$ şi, deci,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \left(1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}} = 1. \tag{2}$$

Relaţiile (1), (2), (ii) şi (iii) arată că există $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$, finită sau nu, şi, prin trecere la limită în (1), obţinem că această limită este $\alpha \ln \beta$, q.e.d.

Observaţie. Menţionăm faptul că pentru calculul limitei de la punctul (iii) (unde apare o nedeterminare de tipul 1^∞) nu putem utiliza limita fundamentală corespunzătoare, anume $\lim\limits_{k\to\infty} (1+x)^{1/x} = e$, ci trebuie procedat în alt mod.

2. Aplicaţie la şiruri remarcabile. Avem în vedere următoarele trei şiruri:

1° *Şirul lui T. Lalescu* $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, $n \geq 2$.

Notăm $a_n = \sqrt[n]{n!}$, $n \geq 2$ şi obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{e} \cdot e \cdot 1 = 1;$$

[1] Elevă, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi