Un procedeu de calcul al limitelor unor şiruri de forma $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$

Oana CÂRJĂ[1]

1. Scopul acestei note este prezentarea unei scheme de calcul al limitelor unor şiruri de forma $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$, schemă desprinsă din soluţia dată de *M. Ţena* relativ la *şirul lui Lalescu* [**1**, p. 443].

Baza teoretică a acestei scheme este dată de următoarea

Propoziţie. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere strict pozitive ce verifică condiţiile:*

$$(i)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1;\quad (ii)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \alpha\in(0,\infty);\quad (iii)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \beta\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \alpha\ln\beta$.

Demonstraţie. Avem:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1}-a_n}}\right]^{\frac{n}{a_n}(a_{n+1}-a_n)},\ n\geq 1,$$

de unde, prin logaritmare, obţinem:

$$(a_{n+1}-a_n)\ln\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1}-a_n}} = \frac{a_n}{n}\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n,\ n\geq 1. \tag{1}$$

Din (i) rezultă imediat că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} = 0$ şi, deci,

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)^{\frac{a_n}{a_{n+1}-a_n}} = 1. \tag{2}$$

Relaţiile (1), (2), (ii) şi (iii) arată că există $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$, finită sau nu, şi, prin trecere la limită în (1), obţinem că această limită este $\alpha\ln\beta$, q.e.d.

Observaţie. Menţionăm faptul că pentru calculul limitei de la punctul (iii) (unde apare o nedeterminare de tipul 1^∞) nu putem utiliza limita fundamentală corespunzătoare, anume $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x)^{1/x} = e$, ci trebuie procedat în alt mod.

2. Aplicaţie la şiruri remarcabile. Avem în vedere următoarele trei şiruri:

1° *Şirul lui T. Lalescu* $L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, $n\geq 2$.

Notăm $a_n = \sqrt[n]{n!}$, $n\geq 2$ şi obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\,\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{e}\cdot e\cdot 1 = 1;$$

---

[1] Elevă, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{n/(n+1)}=e.$$

Conform Propoziţiei, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n=\frac{1}{e}\cdot\ln e=\frac{1}{e}$.

2° *Şirul lui R. T. Ianculescu* $I_n=(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}-n\sqrt[n]{n}$, $n\geq 2$ [**1**, p. 521].

Fie $a_n=n\sqrt[n]{n}$, $n\geq 2$. Se obţine imediat că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. Apoi,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}}{n\sqrt[n]{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=e$$

şi, deci, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=1\cdot\ln e=1$.

3° *Şirul lui M. Ghermănescu* $G_n=\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}-\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}}$, $n\geq 2$ [**1**, p. 520].

Luăm $a_n=n^{n-1}/(n-1)^{n-2}$, $n\geq 2$. Prin calcul, găsim $\alpha=\beta=e$ (cu notaţiile din Propoziţie). Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} G_n=e$.

3. Probleme de concurs. Cu Propoziţia de mai pot fi calculate multe dintre limitele ce sunt date la concursurile şcolare.

1° *Calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}-e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\right)$. **(Olimpiada locală, 2003)**

Luăm $a_n=e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ şi constatăm că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n+1}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n}{n+1}}=e$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}=e^C$, unde $C=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ este *constanta lui Euler*. Deci, limita este e^C.

2° *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale strict pozitive astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a\in R_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{n}=b\in R_+^*$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1}-y_n)=c\in R$. *Demonstraţi că* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_{n+1}\sqrt[n+1]{x_{n+1}}-y_n\sqrt[n]{x_n}\right)=ac$. (**D. M. Bătineţu-Giurgiu, M. Şomodi,** *C:844*, G. M.-11/1988)

Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{y_n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=1$ şi

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{y_{n+1}-y_n}{y_n}\right)^n=\ldots=e^{c/b}$ (calcul de rutină).

Fie $a_n=y_n\sqrt[n]{x_n}$; obţinem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}\cdot\frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}}{\sqrt[n]{x_n}}=1\cdot\frac{a}{a}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{n}\sqrt[n]{x_n}=ba$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)^n\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}}=$ $=e^{c/b}$. Conform Propoziţiei, limita cerută este egală cu $(ba)\ln e^{c/b}$, adică este ac.

Propunem spre rezolvare următoarele probleme selectate din G. M.: C:2062 (7-8/1998), 24628 (1/2002) şi 24708 (5-6/2002).

Bibliografie

1. **D. M. Bătineţu** - *Şiruri*, Ed. "Albatros", Bucureşti, 1979.