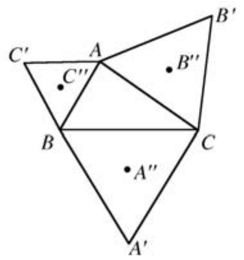
Aplicaţii ale rotaţiei în planul complex

Oana CÂRJĂ[1]

Există o funcţie bijectivă între mulţimea numerelor complexe şi mulţimea punctelor dintr-un plan. Multiplicarea cu i, adică funcţia $z \to iz, z \in \mathbb{C}$, este o rotaţie a planului cu centrul în origine şi unghi de 90°. Multiplicarea $z \to az, z \in \mathbb{C}$, unde a este un număr complex fixat, este o rotaţie în jurul originii cu un unghi egal cu argumentul lui a, compusă cu o omotetie de raport $|a|$. Rotaţia planului cu 90° în jurul unui punct de afix b este dată de $z' = b + i\,(z - b)\,, z \in \mathbb{C}$. Rotaţia planului cu un unghi φ în jurul unui punct de afix b este dată de $z' = b + (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,(z - b)\,, z \in \mathbb{C}$.

Scopul propus este de a pune în evidenţă utilitatea acestei transformări, rotaţia de centru şi unghi date, în rezolvarea unor tipuri de probleme de geometrie.

Problema 1. *Demonstraţi că, dacă se construiesc triunghiuri echilaterale în exterior (sau în interior) pe laturile unui triunghi oarecare, atunci centrele lor sunt vârfurile unui triunghi echilateral.*



Soluţie. Fie $\varepsilon = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$; observăm că $\varepsilon^6 = 1$ şi $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$. Cu notaţiile din figura alăturată şi cu convenţia ca afixul unui punct P să fie notat p, avem: segmentul $(A'C)$ se obţine rotind (BC) cu un unghi de 60° în sens trigonometric, adică $a' - c = \varepsilon\,(b - c)$ sau $a' = c + \varepsilon\,(b - c)\,.$ Analog, găsim: $b' = a + \varepsilon\,(c - a)$ şi $c' = b + \varepsilon\,(a - b)$. Ca urmare, pentru centrele triunghiurilor echilaterale, vom avea:

$$a'' = \frac{1}{3}\,(a' + b + c)\,,\ b'' = \frac{1}{3}\,(b' + c + a)\,,\ c'' = \frac{1}{3}\,(c' + a + b)$$

sau

$$a'' = \frac{1}{3}\,[b + 2c + \varepsilon\,(b - c)]\,,\ b'' = \frac{1}{3}\,[c + 2a + \varepsilon\,(c - a)]\,,\ c'' = \frac{1}{3}\,[a + 2b + \varepsilon\,(a - b)]\,.$$

Atunci,

$$b'' - a'' = \frac{1}{3}\,[2a - b - c + \varepsilon\,(2c - a - b)]\,,\ c'' - a'' = \frac{1}{3}\,[a + b - 2c + \varepsilon\,(a - 2b + c)]$$

şi, înmulţind prima egalitate cu ε şi ţinând seama că $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$, vom obţine:

$$\varepsilon\,(b'' - a'') = \frac{1}{3}\,[\varepsilon\,(2a - b - c) + (\varepsilon - 1)\,(2c - a - b)] =$$

$$= \frac{1}{3}\,[a + b - 2c + \varepsilon\,(a - 2b + c)] = c'' - a''.$$

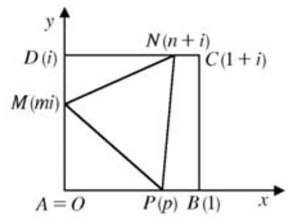
Aşadar, $|b'' - a''| = |c'' - a''|$. Se obţine la fel că $|c'' - b''| = |a'' - b''|$. Ultimele egalităţi arată că triunghiul $A''B''C''$ este echilateral.

Problema 2. *Determinaţi locul geometric al centrelor de greutate ale triunghiurilor echilaterale cu vârfurile pe laturile unui pătrat.*

Soluţie. Fie MNP un triunghi echilateral înscris în pătratul $ABCD$ cu poziţia din figură. Punctele ce intervin au afixele indicate (sistemul de axe ales are latura pătratului ca unitate de măsură pe acestea).

[1] Elevă, clasa a X-a, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

Segmentul (MN) se obţine rotind segmentul (MP) cu un unghi egal cu $\dfrac{\pi}{3}$, deci



$$n+i-mi=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(p-mi)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n+i-mi=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(p-mi)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} n=\dfrac{1}{2}p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}m \\ 1-m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}p-\dfrac{1}{2}m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=2-\sqrt{3}p \\ n=\sqrt{3}-p\end{cases}.$$

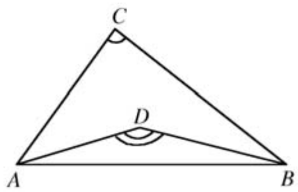
Cum $0\leq m\leq 1$, obţinem că $0\leq 2-\sqrt{3}p\leq 1$, adică $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leq p\leq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Analog, din $0\leq n\leq 1$ obţinem $\sqrt{3}-1\leq p\leq\sqrt{3}$. Ca urmare, $\sqrt{3}-1\leq p\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Punctele M,N,P au afixele $\left(2-\sqrt{3}p\right)i$, $\sqrt{3}-p+i$ şi p, cu $p\in\left[\sqrt{3}-1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Centrul de greutate G al triunghiului MNP are afixul $g=\dfrac{1}{3}\left[\sqrt{3}+\left(3-\sqrt{3}p\right)i\right]=$ $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\alpha i$, unde $\alpha=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}p\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Aşadar, G este situat pe un segment paralel cu Oy de lungime $\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$.

Având în vedere şi celelalte trei poziţii posibile ale triunghiului echilateral faţă de pătrat, obţinem în final că locul geometric căutat este un pătrat de latura $\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$, cu acelaşi centru ca al pătratului dat şi cu laturile paralele cu ale acestuia.

Problema 3. *Fie ABC un triunghi şi D un punct în interiorul său astfel încât $m(\widehat{ADB})=m(\widehat{ACB})+90^\circ$ şi $AC\cdot BD=AD\cdot BC$. Găsiţi raportul $\dfrac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$.*

Soluţie. Alegem un sistem de axe de coordonate cu originea în punctul D şi fie $A\,(a)$, $B\,(b)$, $C\,(c)$. Notăm $\omega=\cos\alpha+i\sin\alpha$, unde $\alpha=m(\widehat{CAD})\in[0,\pi)$, şi $k=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{BD}$.



Deoarece printr-o rotaţie cu unghiul α şi o omotetie de raport $\dfrac{AC}{AD}=k$ segmentul (AD) se transformă în (AC), avem: $\dfrac{a-c}{AC}=\omega\dfrac{a}{AD}$ sau $a-c=k\omega a$.

Din faptul că $m(\widehat{ADB})=m(\widehat{ACB})+90^\circ$ rezulta că $m(\widehat{CAD})+m(\widehat{CBD})=90^\circ$ şi obţinem ca mai sus relaţia $c-b=ki\omega b$.

Relaţiile obţinute conduc la $c=a\,(1-k\omega)=b\,(1+ik\omega)$ şi vom obţine $(a-b)\,c=$ $=k\,(i\omega b+\omega a)\,c=ki\omega b\cdot a\,(1-k\omega)+k\omega a\cdot b\,(1+ik\omega)=kab\omega\,(1+i)$. Ca urmare, $AB\cdot CD=|a-b|\cdot|c|=k\,|a|\,|b|\,|i+1|=k\sqrt{2}AD\cdot BD=\sqrt{2}AC\cdot BD$ şi deci

$\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}$.

Problema 4. *Pe laturile unui hexagon ce are un centru de simetrie se construiesc în exterior triunghiuri echilaterale. Vârfurile acestor triunghiuri, care nu sunt vârfuri ale hexagonului dat, formează un nou hexagon. Arătaţi că mijloacele laturilor acestuia din urmă sunt vârfurile unui hexagon regulat.*

Soluţie. Fie $A_1A_2\ldots A_6$ hexagonul dat (orientat în sens invers acelor de ceasornic), fie $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3, \ldots, A_6B_6A_1$ triunghiurile echilaterale construite pe laturile acestuia şi $C_1, C_2, \ldots, C_6$ mijloacele segmentelor (B_1B_2), $(B_2B_3), \ldots, (B_6B_1)$. Alegem un sistem de axe cu originea în centrul de simetrie al hexagonului şi convenim ca afixul unui punct X să fie notat x. Fie $\varepsilon = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ şi deci $\varepsilon^6 = 1$, $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$, $\varepsilon + \overline{\varepsilon} = 1$.

Deoarece (A_1B_1) se obţine rotind (A_1A_2) cu $\dfrac{\pi}{3}$ în sens negativ, obţinem $b_1 - a_1 = \overline{\varepsilon}\,(a_2 - a_1)$, adică $b_1 = (1-\overline{\varepsilon})\,a_1 + \overline{\varepsilon}a_2$ sau $b_1 = \varepsilon a_1 + (1-\varepsilon)\,a_2$. Analog, se obţine $b_2 = \varepsilon a_2 + (1-\varepsilon)\,a_3$. Vom avea: $c_1 = \dfrac{1}{2}(b_1 + b_2) = \dfrac{1}{2}(\varepsilon a_1 + a_2 + (1-\varepsilon)\,a_3)$ şi relaţii similare pentru $c_2, \ldots, c_6$.

Pe de altă parte, dacă rotim C_1 în jurul originii cu un unghi de $\dfrac{\pi}{3}$, obţinem un punct de afix $\dfrac{1}{2}\varepsilon\,(\varepsilon a_1 + a_2 + (1-\varepsilon)\,a_3) = \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon^2 a_1 + \varepsilon a_2 + \left(\varepsilon - \varepsilon^2\right)a_3\right) = \frac{1}{2}(\varepsilon a_2 + a_3 + (\varepsilon - 1)\,a_1) = \frac{1}{2}(\varepsilon a_2 + a_3 + (1-\varepsilon)\,a_4) = c_2$ (s-a folosit faptul că $a_4 = -a_1$, O fiind centru de simetrie). Aşadar, în urma rotaţiei amintite C_1 trece în C_2. La fel se arată că punctul C_{i+1} se obţine rotind C_i în jurul originii cu $\dfrac{\pi}{3}$ pentru $i = \overline{2,6}$ (C_7 fiind vârful C_1). În concluzie, $C_1C_2\ldots C_6$ este un hexagon regulat cu centrul în origine.

Probleme propuse

1. Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ale patrulaterului $ABCD$ se construiesc în exterior pătratele de centru O_1, O_2, O_3 şi respectiv O_4. Demonstraţi că $O_1O_3 \perp O_2O_4$ şi $[O_1O_3] \equiv [O_2O_4]$.

2. Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale $BA'C$, $CB'A$, $AC'B$. Demonstraţi că: *a*) $[AA'] \equiv [BB'] \equiv [CC']$; *b*) centrele triunghiurilor echilaterale sunt vârfurile unui triunghi echilateral având acelaşi centru de greutate ca şi triunghiul ABC.

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Demonstraţi că, dacă există un punct P în interiorul său astfel încât $m(\widehat{PAB}) = m(\widehat{PBC}) = m(\widehat{PCD}) = m(\widehat{PDA}) = 45°$, atunci $ABCD$ este un pătrat. Generalizare.

Bibliografie

1. **M. Dincă, M. Chiriţă** - *Numere complexe în matematica din liceu*, Editura All Educaţional, 1996.
2. **T. Andreescu, R. Gelca** - *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, 1996.
3. **A. Engel** - *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1999.