Proprietăţi ale patrulaterelor înscrise într-un semicerc

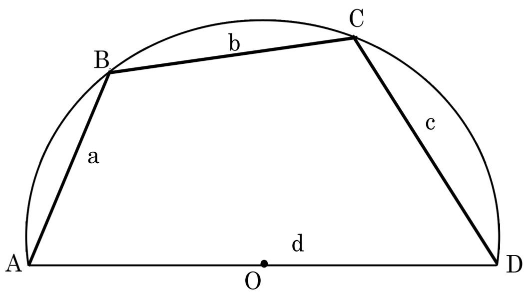
Ioana-Maria POPA[1]

Abstract. In the first Section, the notion of quadrilateral inscribed in a semicircle is defined and two characterisation theorems are proved. In the second Section, the notion of tangential quadrilateral inscribed in a semicircle is explored, and an interesting collinearity theorem is proved.

Keywords: cyclic quadrilateral, tangential quadrilateral, bi-centric quadrilateral, collinearity.

MSC 2010: 51M04.

Definiţie. Vom spune un patrulater este *înscris într-un semicerc* dacă este inscriptibil şi una dintre laturile sale este diametru al cercului circumscris.



În cele ce urmează, vom considera $ABCD$ un patrulater înscris într-un semicerc de centru O, punctul O fiind mijlocul laturii AD. Vom nota $d = AD$ diametrul cercului şi $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ lungimile celorlalte trei laturi ale patrulaterului. În prima secţiune a acestei note vom da două caracterizări ale patrulaterelor înscrise într-un semicerc, iar în cea de-a doua parte vom demonstra o interesantă proprietate a patrulaterelor simultan circumscriptibile şi înscrise într-un semicerc.

I. Caracterizări ale patrulaterelor înscrise într-un semicerc

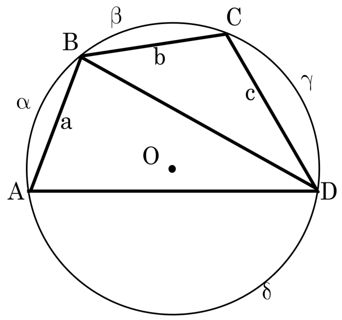
Teorema 1. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil având latura cea mai lungă $d = AD$. Cu notaţiile convenite, patrulaterul $ABCD$ este înscris într-un semicerc dacă şi numai dacă*

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2abc}{d}. \tag{1}$$

Demonstraţie. Implicaţia directă este demonstrată în [1].

[1] Elevă, Colegiul Naţional Iaşi; *ioanamariapopa10@yahoo.com*

Reciproc, presupunem că are loc (1) şi demonstrăm că AD este diametru al cercului circumscris patrulaterului $ABCD$. Exprimăm diagonala BD cu ajutorul teoremei cosinusului în triunghiurile ABD şi BCD; obţinem $BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$, respectiv $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A$. Ţinând cont de (1), deducem:



$$2bc\cos A = 2a^2 + \frac{2abc}{d} - 2ad\cos A \Leftrightarrow (ad+bc)\cos A = \frac{a}{d}(ad+bc)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+d^2-BD^2}{2ad} = \frac{a}{d} \Leftrightarrow a^2 + BD^2 = d^2 \Leftrightarrow AB \perp BD.$$

Observaţia 1. Dacă lungimile laturilor unui patrulater verifică relaţia (1), acest patrulater nu este, în mod necesar, înscris într-un semicerc, după cum se arată în [1] (patrulaterul construit acolo este neinscriptibil).

Observaţia 2. Relaţia (1) admite următoarea interpretare trigonometrică: notăm cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}$, respectiv $\overset{\frown}{AD}$, unde δ este cel mai mare dintre arce şi $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$. Observăm că $AB = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$, unde R este raza cercului circumscris patrulaterului inscriptibil $ABCD$, prin urmare

$$AB^2 = 4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2R^2(1-\cos\alpha)$$

şi analoagele. În aceste condiţii, (1) devine

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma) - 2 = \frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}. \tag{2}$$

Teorema 1 spune că

Egalitatea (2) *este adevărată dacă şi numai dacă* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

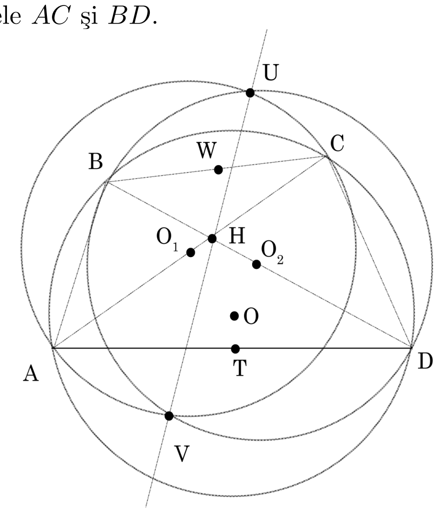
În cazul în care $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, (2) se rescrie sub forma

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

(Propoziţia 13.3 din [2]). Din cele de mai sus, vedem cum ar putea fi formulată o reciprocă a acestei proprietăţi.

Teorema 2. *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil având latura cea mai lungă AD. Axa radicală a cercurilor având ca diametre diagonalele AC şi BD trece prin mijlocul laturii BC dacă şi numai dacă $ABCD$ este trapez isoscel sau patrulater înscris într-un semicerc.*

Demonstraţie. Notăm U şi V punctele de intersecţie dintre cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ având ca diametre diagonalele AC, respectiv BD, O_1, O_2, O centrele cercurilor $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}$ (cercul circumscris patrulaterului), W şi T mijloacele laturilor BC, respectiv AD şi H punctul de intersecţie dintre diagonalele AC şi BD.



Axa radicală a cercurilor $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ este dreapta UV. (Remarcăm, fară legătură cu teorema, că punctul H aparţine axei radicale, oricare ar fi patrulaterul inscriptibil $ABCD$: din asemănarea evidentă a triunghiurilor HAB şi HDC rezultă că $HA \cdot HC = HB \cdot HD$, deci H are aceeaşi putere faţă de cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$.) Puterea punctului W faţă de cercul $\mathcal{C}_1$ de rază R_1 este $WO_1^2 - R_1^2$; cum WO_1 este linie mijlocie în triunghiul ABC şi $R_1 = AO_1$, această putere este egală cu $\frac{1}{4}\left(AB^2 - AC^2\right)$. Analog, puterea punctului W faţă de cercul $\mathcal{C}_2$ este egală cu $\frac{1}{4}\left(CD^2 - BD^2\right)$. Avem:

$$W \in UV \Leftrightarrow AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$$

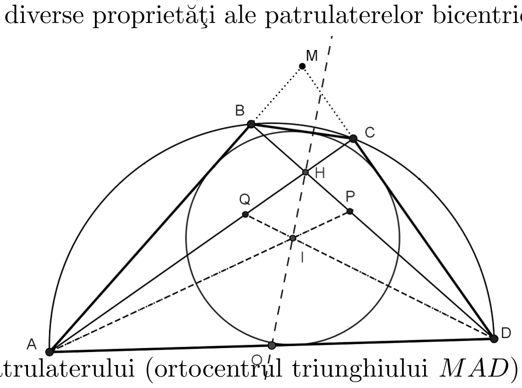
$$\Leftrightarrow \frac{2\left(AB^2 + BD^2\right) - AD^2}{4} = \frac{2\left(AC^2 + CD^2\right) - AD^2}{4} \Leftrightarrow BT = CT$$

$$\Leftrightarrow TW \perp BC \Leftrightarrow \text{punctele } T, O, W \text{ sunt coliniare}$$

$\Leftrightarrow ABCD$ este trapez isoscel (când $O \notin AD$) sau patrulater înscris într-un semicerc (când $O \in AD$).

II. Patrulatere circumscriptibile care sunt înscrise într-un semicerc

În continuare, $ABCD$ va fi patrulater simultan circumscriptibil şi inscriptibil, latura AD fiind diametru al cercului circumscris. Evident, un astfel de patrulater este un caz special de patrulater bicentric; diverse proprietăţi ale patrulaterelor bicentrice pot fi găsite în [3].



Păstrăm convenţiile de notare din primul paragraf şi, în plus, considerăm punctele: O este mijlocul laturii AD (centrul cercului circumscris patrulaterului), I este intersecţia bisectoarelor unghiurilor $\widehat{A}$ şi $\widehat{D}$ (centrul cercului înscris în patrulater), M este punctul în care se intersectează laturile AB şi CD, iar H este punctul în care se intersectează diagonalele patrulaterului (ortocentrul triunghiului MAD).

Observaţia 3. Între elementele unui patrulater circumscriptibil care este înscris într-un semicerc există următoarele legături:

a) circumscriptibilitatea este caracterizată de teorema lui Pithot: $a + c = b + d$;

b) inscriptibilitatea poate fi caracterizată cu ajutorul teoremei lui Ptolemeu $AC \cdot BD = ac + bd$ sau prin condiţia $\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$;

c) inscriptibilitatea în semicerc este caracterizată de Teorema 1: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2abc}{d}$.

Ca urmare, $ABCD$ este determinat dacă sunt date numai două laturi, de exemplu a şi d (ştiind care latură este diametru în cercul circumscris, în cazul nostru acesta fiind d). Pentru determinarea laturilor c şi d, observăm că diferenţa lor este $c-b = d-a$, iar produsul lor poate fi aflat folosind Teorema 1: $2abc = d^3-a^2d-d\left(b^2 + c^2\right) = d^3-a^2d-d\left((c-b)^2 + 2bc\right) = d^3 - a^2d - d\left((d-a)^2 + 2bc\right) = d\left(d^2 - a^2\right) - d\left(d-a\right)^2 - 2bcd$, prin urmare $2bc\left(d + a\right) = d\left(d - a\right)\left(d + a + d - a\right) = 2ad\left(d - a\right)$, deci $bc = \frac{ad(d-a)}{d+a}$. În concluzie, c şi $(-b)$ sunt soluţiile ecuaţiei

$$t^2 - \left(d - a\right)t - \frac{ad\left(d - a\right)}{d + a} = 0. \tag{3}$$

Observaţia 4. Evident, d este cea mai lungă dintre laturile patrulaterului, iar b este cea mai mică (din $a + c = b + d$). Între laturile a şi c nu este impusă o ordine. Cazurile $a < c$ şi $a > c$ sunt simetrice faţă de mediatoarea diametrului, deci ne putem mărgini la studierea unuia dintre ele, fără a restrânge generaliatea.

Cazul $a = c$ conduce la un trapez isoscel având laturile neparalele de lungime a şi bazele de lungimi d, respectiv $2a - d$. Înlocuind în relaţia (1), obţinem imediat că

$$\frac{d}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (tăietura de aur)}.$$

Dintre trapezele isoscele înscrise într-un semicerc, numai acesta, cel "de aur", este circumscriptibil.

Observaţia 5. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un semicerc având latura cea mai lungă AD. Atunci

$$ABCD \text{ este circumscriptibil} \Leftrightarrow \cos A + \cos D + \cos\left(A + D\right) = 1. \tag{4}$$

Pentru a demonstra această afirmaţie, observăm că $a = d\cos A$, $c = d\cos D$ şi, din asemănarea triunghiurilor MBC şi MDA (BC este antiparalelă laturii AD în triunghiul MAD), avem că

$$BC = \frac{CM \cdot AD}{AM} = \frac{AM\cos M \cdot d}{AM} = d\cos\left(180° - \left(A + D\right)\right) = -d\cos\left(A + D\right).$$

În aceste condiţii,

$$ABCD \text{ este circumscriptibil} \Leftrightarrow a + c = b + d$$

$\Leftrightarrow d\cos A + d\cos D = -d\cos(A+D) + d \Leftrightarrow \cos A + \cos D + \cos(A+D) = 1.$

Observaţia 6. Punctul I este situat în interiorul triunghiului BHC.

Într-adevăr, fie E punctul de tangenţă dintre cercul înscris în patrulater şi latura CD. Dreptele AH şi IE sunt paralele (ambele sunt perpendiculare pe CD) şi E este punct interior segmentului CD; rezultă că punctele I şi D se află de aceeaşi parte a dreptei AH. Analog se arată că punctele I şi A se află de aceeaşi parte a dreptei DH. Este evident faptul că punctele I şi H se află de aceeaşi parte a dreptei AD.

Teorema 3. *Fie $ABCD$ un patrulater simultan circumscriptibil şi inscriptibil, latura AD fiind diametru al cercului circumscris; ca mai sus, notăm O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris şi H inersecţia diagonalelor. Considerăm punctele P şi Q în care dreptele AI şi BI intersectează diagonalele BD, respectiv AC. În aceste condiţii,*
(i) dreptele PQ şi AD sunt paralele;
(ii) punctele O, I şi H sunt coliniare.

Demonstraţie. În primul rând, remarcăm că proprietăţile (i) şi (ii) sunt echivalente: folosind, în triunghiul HAD, teorema lui Ceva şi reciproca sa, precum şi teorema lui Thales şi reciproca sa, avem

$$O, I, H \text{ sunt coliniare} \Leftrightarrow \frac{HQ}{QA} \cdot \frac{AO}{OD} \cdot \frac{DP}{PH} = 1 \Leftrightarrow \frac{HQ}{QA} = \frac{HP}{PD} \Leftrightarrow PQ \| AD.$$

Ne propunem să demonstrăm proprietatea (i). Ţinând cont de Observaţia 6, punctul P este interior segmentului HD. Patrulaterul $BHCM$ fiind inscriptibil, avem că $\widehat{CHD} \equiv \widehat{M}$. Din triunghiul dreptunghic CHD obţinem că $HD = \frac{CD}{\sin CHD} = \frac{d\cos D}{\sin M}$. Analog se arată că $HA = \frac{d\cos A}{\sin M}$. Din teorema bisectoarei aplicată în triunghiul BAD rezultă:

$$\frac{BP}{PD} = \frac{AB}{AD} = \cos A \Rightarrow \frac{BD}{PD} = 1 + \cos A \Rightarrow PD = \frac{d\sin A}{1+\cos A}.$$

Analog, $QA = \frac{d\sin D}{1+\cos D}$. Folosind teorema lui Thales şi reciproca sa în triunghiul HAD, avem:

$$PQ \| AD \Leftrightarrow \frac{QA}{HA} = \frac{PD}{HD} \Leftrightarrow \frac{d\sin D}{1+\cos D} \cdot \frac{\sin M}{d\cos A} = \frac{d\sin A}{1+\cos A} \cdot \frac{\sin M}{d\cos D}$$

$$\Leftrightarrow \sin A\cos A\,(1+\cos D) = \sin D\cos D\,(1+\cos A)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \cdot \cos A \cdot 2\cos^2\frac{D}{2} = 2\sin\frac{D}{2}\cos\frac{D}{2} \cdot \cos D \cdot 2\cos^2\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{D}{2}\cos A = \sin\frac{D}{2}\cos\frac{A}{2}\cos D.$$

Rămâne să justificăm această egalitate. Din Observaţia 5, ştim că are loc relaţia (4) şi, în aceste condiţii, concluzia teoremei rezultă din următoarea

Lemă. ([4]) *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2(a+b) = 1$*; atunci*

$$\sin a \cos b \cos 2a = \sin b \cos a \cos 2b.$$

Demonstraţia lemei. Dacă $b = a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, egalitatea din concluzie este evidentă. În caz contrar, avem că $\sin(a-b) \neq 0$ şi atunci, transformând produsele în sume, apoi sumele în produse, identitatea de demonstrat se rescrie succesiv:

$$\sin a\left[\cos(2a+b) + \cos(2a-b)\right] = \sin b\left[\cos(a+2b) + \cos(2b-a)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin(3a+b) + \sin(-a-b)\right] + \left[\sin(3a-b) + \sin(-a+b)\right] =$$

$$= \left[\sin(a+3b) + \sin(-a-b)\right] + \left[\sin(3b-a) + \sin(-b+a)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin(3a+b) - \sin(a+3b) + \sin(3a-b) - \sin(3b-a) - 2\sin(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(a-b)\cos(2a+2b) + \sin(2a-2b)\cos(a+b) - \sin(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(a-b)\left[\cos(2a+2b) + 2\cos(a-b)\cos(a+b) - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2(a+b) + \cos 2a + \cos 2b - 1 = 0,$$

iar această relaţie este adevărată din ipoteza problemei.

Bibliografie

1. M. Gotea – *O extindere a teoremei lui Pitagora*, Gazeta Matematică 4/2017.
2. T. Lalescu – *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, Bucureşti, 1958.
3. O. Pop, N. Minculete, M. Bencze – *An Introduction to Quadrilateral Geometry*, E.D.P., Bucureşti, 2013.
4. I.M. Popa, Gh. Iurea – Problema *S:L17.310*, Gazeta Matematică 11/2017.

Recreaţii... matematice

Ionel primeşte ca temă următorul exerciţiu: Să se scrie mai simplu numărul:

$$A = \frac{a^a + \overline{a1}^2 + 77^0 + 79^1}{\overline{aa} + \overline{a12} + 770 + 791}.$$

Pentru a rezolva mai repede, el ,,simplifică" fracţia astfel:

$$A = \frac{\cancel{a}^a + \overline{a\cancel{1}}^2 + \cancel{7}7^0 + 7\cancel{9}^1}{\overline{\cancel{a}a} + \overline{a1\cancel{2}} + \cancel{7}70 + 7\cancel{9}1} = \frac{1+1+1+1}{1+1+1+1} = \frac{4}{4} = 1.$$

Profesorul, verificând tema, îi comunică lui Ionel nota:

Ionel, ai primit nota a, unde a este numărul pentru care răspunsul tău este corect.

Ce notă a primit Ionel?

Valeriu Braşoveanu, Bârlad

(*Răspuns la p. 30*)