Conice şi cubice în probleme elementare de loc geometric

Ştefan DOMINTE[1]

Abstract. In this Note, a number of simple problems are presented to support the idea that conic and cubic curves can frequently occur in elementary issues of Euclidean geometry.

Keywords: median, altitude, angle bisector, perpendicular bisector, locus.

MSC 2010: 51M04.

Este cunoscut faptul că problemele de loc geometric pot conduce la conice, cubice etc., chiar şi atunci când figura de pornire este extrem de simplă. Vom ilustra această idee considerând figuri formate doar din câteva drepte şi obţinând locuri geometrice de regulă conice sau cubice şi doar accidental puncte, drepte sau cercuri.

Problema 1. *Fie B şi C două puncte fixe în plan, Δ o dreaptă fixă paralelă cu BC, A un punct fix pe Δ şi P intersecţia cevienelor BB' ($B' \in AC$) şi CC' ($C' \in AB$). Să se determine locul geometric al punctului P, atunci când A este mobil pe Δ, ştiind că ceviana BB' (cât şi, independent, ceviana CC') are una dintre proprietăţile: este mediană (m, pe scurt), este înălţime (h) sau este bisectoare (b).*

Se impun a fi studiate un număr de şase cazuri relativ la cuplul de ceviene (BB', CC'): 1) *m-m*, 2) *m-h*, 3) *m-b*, 4) *h-h*, 5) *h-b*, 6) *b-b*. Cazurile *h-m*, *b-m*, *b-h* sunt simetrice faţă de cazurile 2), 3), respectiv 4), locurile respective fiind curbe simetrice în raport cu mediatoarea segmentului BC.

Notăm cu a lungimea segmentului BC şi cu d distanţa dintre dreptele BC şi Δ. Locul punctului P depinde de parametrii a şi d, uneori fiind necesară o discuţie după valorile lor.

1. Cazul mediană-mediană (m-m). Este un caz trivial. Dacă BB' şi CC' sunt mediane în triunghiul ABC, atunci P este centrul de greutate al lui şi va fi la distanţa $\dfrac{d}{3}$ de dreapta BC. Ca urmare, locul punctului P este dreapta paralelă cu BC, la distanţa $\dfrac{d}{3}$ de BC şi situată faţă de BC de partea în care se află Δ.

2. Cazul mediană-înălţime (m-h). Alegem un reper cartezian cu originea în B ca în Fig.1. Notăm cu $\lambda \in \mathbb{R}$ abscisa punctului A mobil pe Δ. Avem: $A(\lambda, d)$, $B(0,0)$, $C(a,0)$ şi $B'(\dfrac{a+\lambda}{2}, \dfrac{d}{2})$. Ecuaţiile medianei BB' şi înălţimii CC' sunt:

$$(BB') : y = \frac{d}{a+\lambda}x, \qquad (CC') : y = -\frac{\lambda}{d}(x-a).$$

[1]Elev, cl. a XII-a, Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti; *stef_dominte@yahoo.com*

Din a doua ecuaţie avem că $\lambda = -\dfrac{dy}{x-a}$ şi, prin înlocuire în prima ecuaţie, obţinem ecuaţia locului geometric: $y(a - \dfrac{dy}{x-a}) = dx$ sau

$$d(x^2 + y^2) - axy - adx + a^2y = 0. \tag{1}$$

Evident, (1) este ecuaţia unei conice. Se verifică direct că ea trece prin punctele B şi C. Cum

$$\delta = \begin{vmatrix} d & -a/2 \\ -a/2 & d \end{vmatrix} = (d + \frac{a}{2})(d - \frac{a}{2}),$$

conica este o *elipsă*, dacă $\delta > 0 \iff a < 2d$, o *hiperbolă*, dacă $\delta < 0 \iff a > 2d$ sau o *parabolă*, dacă $a = 2d$. În Fig.1, cazul $a < 2d$, locul geometric este o elipsă.

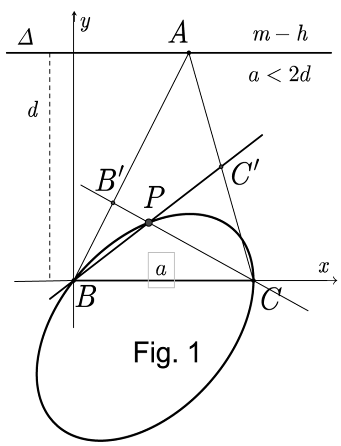

Fig. 1

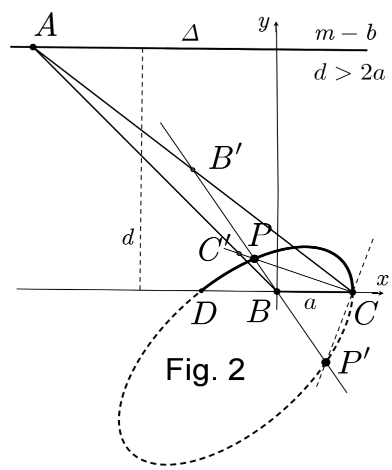

Fig. 2

3. Cazul mediană-bisectoare (m-b). Alegem acelaşi sistem de axe (Fig.2). Ca şi mai sus, ecuaţia medianei este (BB'): $y = \dfrac{d}{a+\lambda}x$. Cum dreptele CB şi CA au ecuaţiile $y = 0$ şi $y = \dfrac{d}{\lambda - a}(x - a)$, bisectoarea CC' are ecuaţia (CC'): $y = \dfrac{|dx - (\lambda - a)y - ad|}{\sqrt{d^2 + (\lambda - a)^2}}$.

Ecuaţia locului punctului P se obţine eliminând λ din sistemul ecuaţiilor

$$y = \frac{d}{a+\lambda}x, \qquad y = \frac{|dx - (\lambda - a)y - ad|}{\sqrt{d^2 + (\lambda - a)^2}}.$$

Din prima ecuaţie rezultă că $a + \lambda = \dfrac{dx}{y}$ şi apoi $\lambda - a = \dfrac{dx - 2ay}{y}$. Ridicând la pătrat a doua ecuaţie şi substituind $\lambda - a$ cu expresia găsită, avem:

$$y^2[d^2 + (\frac{dx - 2ay}{y})^2] = [dx - (dx - 2ay) - ad]^2$$

şi, după calcule de rutină, obţinem ecuaţia locului geometric:

$$d(x^2+y^2)-4axy+4a^2y-a^2d=0, \tag{2}$$

o conică care trece prin punctele $C(a,0)$ şi $D(-a,0)$. Pentru conica (2) avem $\delta = \begin{vmatrix} d & -2a \\ -2a & d \end{vmatrix} = (d+2a)(d-2a)$, deci avem *elipsă*, *hiperbolă*, sau *parabolă* după cum $d>2a$, $d<2a$, respectiv $d=2a$.

Observăm că punctul P, din modul cum este definit, se află ,,deasupra" dreptei BC; ca urmare, locul punctului P este arcul $\overset{\frown}{CD}$ al conicei (2) situat ,,deasupra" dreptei BC. În Fig.2, cazul $d>2a$, locul lui P este arcul de elipsă $\overset{\frown}{CD}$. Dacă considerăm şi punctul P' de intersecţie a medianei BB' cu bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{C}$, constatăm că punctul P' parcurge arcul $\overset{\frown}{CD}$ aflat ,,sub" BC (Fig. 2, linia întreruptă). Explicaţia vine de la faptul că prin ridicarea la pătrat efectuată mai sus s-a pus în joc şi bisectoarea exterioară.

4. Cazul înălţime-înălţime (h-h). Faptul că intră în joc o singură linie importantă a triunghiului face ca acest caz să prezinte o ,,simetrie" în raport cu laturile AB şi AC, iar în final locul geometric să fie o curbă simetrică faţă de mediatoarea segmentului BC. Ca urmare, de data aceasta este avantajos să alegem un reper cu originea în mijlocul segmentului BC şi ca axe dreapta BC (cu sensul de la B la C) şi mediatoarea segmentului BC. Avem: $B(-\frac{a}{2},0)$, $C(\frac{a}{2},0)$, $A(\lambda,d)$, iar înălţimile BB' şi CC' au ecuaţiile:

$$(BB'): y=-\frac{\lambda-\frac{a}{2}}{d}(x+\frac{a}{2}), \qquad (CC'): y=-\frac{\lambda+\frac{a}{2}}{d}(x-\frac{a}{2}).$$

Din prima ecuaţie rezultă că $\lambda-\frac{a}{2}=-\frac{dy}{x+\frac{a}{2}}$ sau $\lambda+\frac{a}{2}=a-\frac{dy}{x+\frac{a}{2}}$ şi, înlocuind în a doua ecuaţie, obţinem că $dy=-(a-\frac{dy}{x+\frac{a}{2}})(x-\frac{a}{2})$, iar după calcule, ecuaţia locului geometric:

$$y=\frac{1}{d}(\frac{a^2}{4}-x^2), \tag{3}$$

adică o *parabolă* cu axa de simetrie $x=0$ (mediatoarea segmentului BC), cu concavitatea spre y-ii negativi, ce trece prin punctele B şi C şi are vârful $(0,\frac{a^2}{4d})$.

5. Cazul înălţime-bisectoare (h-b). Revenind la reperul considerat în cazurile 2 şi 3 (v. şi Fig.3), înălţimea BB' şi bisectoarea CC' au ecuaţiile:

$$(BB'): y=-\frac{\lambda-a}{d}x, \qquad (CC'): y=\frac{|dx-(\lambda-a)y-ad|}{\sqrt{d^2+(\lambda-a)^2}}.$$

Procedând în acelaşi mod, obţinem mai întâi $\lambda - a = -\dfrac{dy}{x}$ şi apoi ecuaţia locului punctului P:

$$y^2[d^2 + \frac{d^2y^2}{x^2}] = (dx + \frac{dy^2}{x} - ad)^2 \Longleftrightarrow$$
$$x^3 + xy^2 - 2ax^2 - 2ay^2 + a^2x = 0 \Longleftrightarrow (2a - x)y^2 = x(x-a)^2.$$

Mutând originea sistemului în punctul C prin translaţia $x = a + t$, ultima ecuaţie se scrie în forma $(a - t)y^2 = (a + t)t^2$ sau, echivalent,

$$y = \pm t\sqrt{\frac{a+t}{a-t}}. \tag{4}$$

Aceasta este ecuaţia *strofoidei* cu nodul $t = 0$ - punctul C - şi asimptota $t = a$ sau $x = 2a$ - dreapta perpendiculară pe BC în simetricul punctului B faţă de C.

Similar cu situaţia din Cazul 3, punctul P' de intersecţie a înălţimii BB' cu bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{C}$, parcurge ramura strofoidei figurată întrerupt (Fig. 3).

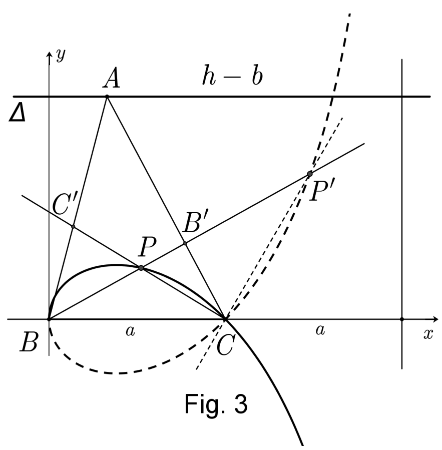

Fig. 3

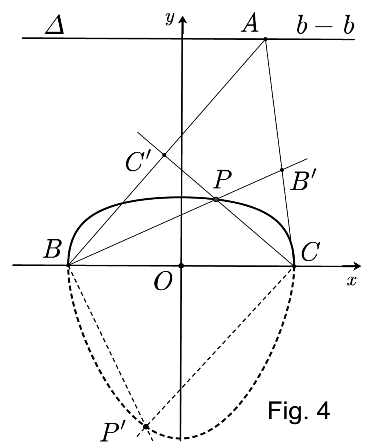

Fig. 4

6. Cazul bisectoare-bisectoare (b-b). Din motive de simetrie, vom alege un reper cu originea în mijlocul segmentului BC (Fig.4), aşa cum s-a procedat în Cazul 4 *(h-h)*.

Cum ecuaţiile dreptelor BC, AB, AC sunt:

$$(BC) : y = 0, \quad (AB) : y = \frac{d}{\lambda + \frac{a}{2}}(x + \frac{a}{2}), \quad (AC) : y = \frac{d}{\lambda - \frac{a}{2}}(x - \frac{a}{2}),$$

bisectoarele BB' şi CC' au următoarele ecuaţii:

$$(BB') : y = \frac{|dx - (\lambda + \frac{a}{2})y + \frac{ad}{2}|}{\sqrt{d^2 + (\lambda + \frac{a}{2})^2}}, \qquad (CC') : y = \frac{|dx - (\lambda - \frac{a}{2})y - \frac{ad}{2}|}{\sqrt{d^2 + (\lambda - \frac{a}{2})^2}}.$$

Prin ridicare la pătrat, din aceste ecuaţii obţinem:

$$\lambda + \frac{a}{2} = \frac{d(x^2 - y^2) + adx + \frac{a^2 d}{4}}{2xy + ay}, \qquad \lambda - \frac{a}{2} = \frac{d(x^2 - y^2) - adx + \frac{a^2 d}{4}}{2xy - ay}.$$

Înlocuind aceste expresii în identitatea $\lambda + \frac{a}{2} = (\lambda - \frac{a}{2}) + a$ şi efectuând calcule de rutină, vom obţine ecuaţia locului:

$$(4x^2 - a^2)y = 2d(x^2 + y^2) - \frac{a^2 d}{2}. \tag{5}$$

Aceasta reprezintă o cubică ce trece prin punctele B şi C şi este simetrică în raport cu mediatoarea segmentului BC. Forma ei, trasată cu programul Geogebra, este redată în Fig.4, linia continuă; linia întreruptă ce completează cubica corespunde bisectoarelor exterioare în vârfurile B şi C.

Enunţul Problemei 1 poate fi cu uşurinţă modificat în scopul obţinerii de noi probleme înrudite. În acest sens, indicăm două direcţii posibil de urmat: antrenarea şi altor linii remarcabile ale triunghiului (mediatoarea, simediana etc.) şi/sau înlocuirea dreptei fixe Δ paralelă cu BC cu alte curbe (cerc prin punctele B şi C, parabolă etc.). Este de aşteptat, însă, ca forma curbelor obţinute ca loc geometric să fie mult mai complicată. Vom vedea acest lucru în cazul mediatoarei, pe care o alăturăm celor trei linii deja considerate în Problema 1.

Problema 2. *În condiţiile existente în Problema 1, să se determine locul geometric al punctului P de intersecţie a mediatoarei laturii AB cu: mediatoarea, mediana, înălţimea sau bisectoarea corespunzătoare laturii AC.*

7. Cazul mediatoare-mediatoare (M-M). Acest caz este simplu şi poate fi tratat sintetic. Totul se sprijină pe faptul că mediatoarele segmentelor AB şi AC (mobile) se intersectează pe mediatoarea segmentului BC (fixă). Dacă aceasta din urmă intersectează dreapta Δ în punctul A_0 şi O este centrul cercului circumscris triunghiului A_0BC, atunci locul cerut este semidreapta $[OA_0)$, ce este parcursă de două ori.

8. Cazul mediatoare-mediană (M-m). Considerăm sistemul de axe cu originea în B utilizat anterior. Coordonatele mijloacelor laturilor AB şi AC sunt $(\frac{\lambda}{2}, \frac{d}{2})$ şi $(\frac{\lambda + a}{2}, \frac{d}{2})$, iar ecuaţiile mediatoarei şi medianei sunt:

$$(M) : y - \frac{d}{2} = -\frac{\lambda}{d}(x - \frac{\lambda}{2}), \qquad (m) : y = \frac{d}{\lambda + a}x.$$

Eliminând λ din aceste ecuaţii obţinem:

$$2dx^2y - 2axy^2 + 2dy^3 - d^2x^2 + 2adxy - (a^2 + d^2)y^2 = 0 \tag{6}$$

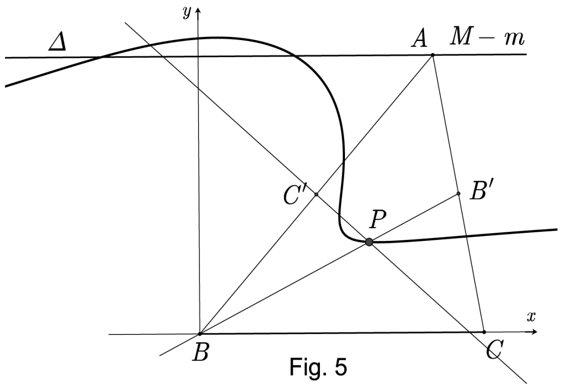

Fig. 5

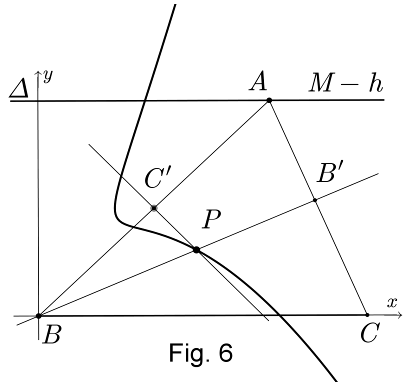

Fig. 6

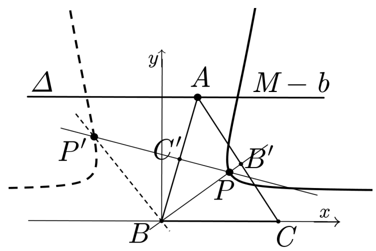

Fig. 7

(cu excluderea punctului $(0,0)$), care reprezintă o cubică. Graficul locului geometric, realizat cu programul Geogebra, este prezentat în Fig. 5.

9. Cazul mediatoare-înălţime (M-h). Procedând ca în cazul precedent, obţinem cubica

$$x^2(2ax - d^2) = (dy - ax)^2, \tag{7}$$

al cărei grafic este redat în Fig. 6.

10. Cazul mediatoare-bisectoare (M-b). Locul geometric are ecuaţia

$$4x^2y = d(x^2 + y^2), \tag{8}$$

cubică cu graficul dat în Fig. 7. Cubica este simetrică faţă de axa y-lor (perpendiculara în B pe BC), ramura cu linie întreruptă fiind generată de punctul P' (de intersecţie a mediatoarei cu bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{B}$).

Încheiem cu observaţia că este de aşteptat să obţinem rezultate interesante dacă în Problemele 1 şi 2 dreapta Δ pe care se mişcă punctul mobil A se înlocuieşte cu un cerc ce trece prin punctele fixe B şi C.