Lifting The Exponent Lemma (LTE). Aplicaţii

Răzvan Andrei MORARIU, Vlad TUCHILUŞ,
Robert ANTOHI[1]

Abstract. A number of problems in the field of number theory, either selected from lists of problems for some mathematical contests or proposed by the authors of this paper themselves, are solved using - as a work tool - the LTE (Lifting the Exponent Lemma).

Keywords: prime number, exponent, Diophantine equation, Lifting the Exponent Lemma.

MSC 2010: 11D61.

În acest articol ne propunem să prezentăm o metodă mai puţin cunoscută de rezolvare a unor probleme de teoria numerelor. Rezultatul pe care îl vom folosi, numit *Lifting The Exponent Lemma*, pe scurt, *LTE*, şi variantele sale, se poate găsi demonstrat în [**1**]. Lifting The Exponent Lemma este utilă în multe probleme referitoare la ecuaţii diofantice exponenţiale, mai ales atunci când apar şi numere prime. Lema ne arată cum putem găsi cea mai mare putere a unui număr prim p care divide $a^n \pm b^n$, unde a şi b sunt numere întregi.

Definiţie. Fie p un număr prim şi x un număr întreg. Notăm cu $v_p(x)$ cel mai mare număr natural k cu proprietatea că $p^k \mid x$, adică dacă şi numai dacă $p^k \mid x$ şi $p^{k+1} \nmid x$.

Exemple. 1) Cea mai mare putere a lui 2 care divide pe $2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$ este 5, deci $v_2(2400) = 5$.

2) Deoarece $117 = 3^2 \cdot 13$, rezultă că $v_3(117) = 2$.

3) Dacă p şi q sunt două numere prime diferite, iar α şi β sunt două numere întregi pozitive, atunci $v_p\left(p^\alpha \cdot q^\beta\right) = \alpha$.

Observaţie. Dacă p este un număr prim, iar x şi y sunt două numere întregi, atunci

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y); \qquad v_p(p^\alpha) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}^*.$$

Lema 1 (*LTE, prima variantă*). *Dacă p este un număr prim impar şi x, y sunt două numere întregi nedivizibile cu p astfel încât $p \mid x - y$, iar n este un număr întreg pozitiv, atunci*

$$v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n).$$

Lema 2 (*LTE, a doua variantă*). *Dacă p este un număr prim impar şi x, y sunt două numere întregi nedivizibile cu p astfel încât $p \mid x + y$, iar n este un număr întreg pozitiv impar, atunci*

$$v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n).$$

[1] Elevi, clasa a IX-a, Colegiul Naţional ,,C. Negruzzi", Iaşi

Lema 3 (*LTE pentru* $p = 2$, *prima variantă*). *Dacă* x *şi* y *sunt două numere întregi impare astfel încât* $4 \mid x - y$, *iar* n *este un număr întreg pozitiv, atunci*

$$v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2\left(x - y\right) + v_2\left(n\right).$$

Lema 4. (*LTE pentru* $p = 2$, *a doua variantă*). *Dacă* x *şi* y *sunt două numere întregi impare, iar* n *este un număr par pozitiv, atunci*

$$v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2\left(x - y\right) + v_2\left(x + y\right) + v_2\left(n\right) - 1.$$

Aplicaţii

1. *Aflaţi valoarea maximă a numărului natural* n *pentru care fracţia* $\dfrac{17^{88} - 1}{2^n}$ *este un număr natural.* (S:L15.243, GM-9/2015, *Carmen* şi *Viorel Botea*)

Soluţie. Cerinţa problemei este echivalentă cu a determina exponentul maxim n pentru care 2^n divide numărul $17^{88} - 1$. Vom utiliza Lema 3 cu $x = 17$, $y = 1$, $n = 88$. Cum $4 \mid (17 - 1)$ şi $2 \nmid 17$, $2 \nmid 1$, sunt îndeplinite condiţiile acesteia, deci avem:

$$v_2\left(17^{88} - 1\right) = v_2\left(17 - 1\right) + v_2\left(88\right) = 4 + 3 = 7.$$

Prin urmare, 7 este valoarea maximă a lui n pentru care fracţia dată este număr natural.

2. *Fie* p *un număr prim impar care nu divide pe* 2015. *Demonstraţi că, oricare ar fi numărul natural* n, *nu există două numere naturale* x *şi* y *prime cu* p, *astfel încât* $p^n = x^{2015} + y^{2015}$. (*Vlad Tuchiluş*)

Soluţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că există un număr natural n şi două numere naturale x şi y prime cu p şi care verifică ecuaţia diofantică din enunţ.

Dacă $n = 0$, atunci ecuaţia devine $1 = x^{2015} + y^{2015}$, deci $(x, y) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, ceea ce contrazice faptul că x şi y sunt prime cu p.

Presupunem că $n \geq 1$. În acest caz, avem

$$p^n = x^{2015} + y^{2015} = (x + y)\left(x^{2014} - x^{2013}y + ... + xy^{2013} - y^{2014}\right),$$

de unde deducem că p divide $x + y$ sau $x + y = 1$.

Dacă $p \mid x + y$, atunci, conform Lemei 2, rezultă că

$$n = v_p\left(p^n\right) = v_p\left(x^{2015} + y^{2015}\right) = v_p\left(x + y\right) + v_p\left(2015\right) = v_p\left(x + y\right),$$

deci, $x + y \geq p^n = x^{2015} + y^{2015}$, de unde reiese că $x, y \in \{0, 1\}$. Ca urmare, $p^n \leq 1^{2015} + 1^{2015} = 2$, ceea ce nu este posibil în condiţiile în care ne aflăm.

Dacă $x + y = 1$, obţinem că $(x, y) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$, ceea ce iarăşi nu este posibil. Aşadar, presupunerea făcută este falsă, iar demonstraţia se încheie.

3. *Fie* p *un număr prim,* a *şi* n *două numere întregi pozitive. Demonstraţi că, dacă* $2^p + 3^p = a^n$, *atunci* $n = 1$. (Irlanda, 1996)

Soluţie. Pentru $p = 2$, avem $a^n = 13$, iar dacă $p = 5$, obţinem $a^n = 275 = 5^2 \cdot 11$. În ambele cazuri, $n = 1$.

Dacă p este număr prim, diferit de 2 şi 5, vom folosi Lema 2. Într-adevăr, condiţiile din ipoteza lemei sunt verificate, deci avem:

$$v_5\left(2^p + 3^p\right) = v_5(5) + v_5(p) = 1 + 0 = 1.$$

Deci, $v_5(a^n) = 1$, de unde deducem că $n = 1$.

4. *Fie p un număr prim, $p \neq 3$, şi a, b două numere întregi astfel încât $p \mid a + b$ şi $p^2 \mid a^3 + b^3$. Demonstraţi că $p^2 \mid a + b$ sau $p^3 \mid a^3 + b^3$.* (Primul test pentru OBMJ, 2008)

Soluţie. Dacă $p \mid a$ sau $p \mid b$, atunci, cum avem şi $p \mid a + b$, rezultă că $p \mid a$ şi $p \mid b$, deci $p^3 \mid a^3 + b^3$.

Presupunem, în continuare, că $p \nmid a$ şi $p \nmid b$. Analizăm două cazuri: $p = 2$ şi $p \neq 2$.

I. Pentru $p = 2$, avem $2 \mid a + b$ şi $4 \mid a^3 + b^3$, de unde obţinem că $2^2 \mid a + b$ sau $2 \mid a^2 - ab + b^2$. Constatăm că $2 \nmid a^2 - ab + b^2$; într-adevăr, dacă $2 \mid a^2 - ab + b^2$, având în vedere că $2 \mid a + b$, deducem că $2 \mid ab$, ceea ce este în contradicţie cu faptul că $2 \nmid a$ şi $2 \nmid b$. Rămâne că $2^2 \mid a + b$.

II. Pentru $p \neq 2$, aplicând Lema 2, obţinem:

$$v_p\left(a^3 + b^3\right) = v_p(a + b) + v_p(3) = v_p(a + b).$$

Cum $p^2 \mid a^3 + b^3$, înseamnă că $v_p\left(a^3 + b^3\right) \geq 2$, ceea ce implică că $v_p(a + b) \geq 2$, adică $p^2 \mid a + b$.

5. *Determinaţi soluţiile întregi pozitive ale ecuaţiei $3^x = 2^x \cdot y + 1$.* (Primul test pentru OIM şi OBM, 2005)

Soluţie. Ecuaţia dată este echivalentă cu

$$y = \frac{3^x - 1}{2^x}.$$

Cum y este număr întreg pozitiv, pentru a rezolva ecuaţia trebuie să determinăm $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât 2^x să dividă pe $3^x - 1$. Vom considera două cazuri, în funcţie de paritatea lui x.

Dacă x este impar, avem că $3^x \equiv -1 \pmod 4$ şi deducem că $3^x - 1 \equiv 2 \pmod 4$. Cum $4 \nmid 3^x - 1$, obţinem că $x \leq 1$, deoarece $2^x \mid 3^x - 1$. Ca urmare, obţinem soluţia: $x = 1$ şi $y = 1$.

Dacă x este par, vom aplica Lema 4; avem:

$$v_2\left(3^x - 1\right) = v_2(2) + v_2(4) + v_2(x) - 1 = 2 + v_2(x)$$

Cum $2^x \mid 3^x - 1$, rezultă că $x \leq v_2\left(3^x - 1\right) = 2 + v_2(x)$, deci $x - 2 \leq v_2(x)$, ceea ce implică $2^{x-2} \mid x$, deci $2^{x-2} \leq x$. Întrucât $2^{x-2} > x$ pentru orice $x \geq 6$, rezultă că singurele soluţii pare ale inecuaţiei precedente sunt $x = 2$ şi $x = 4$. Pentru $x = 2$, obţinem $y = 2$, iar pentru $x = 4$, găsim $y = 5$.

În concluzie, soluţiile problemei sunt: $x = y = 1$, $x = 2$ şi $y = 2$, $x = 4$ şi $y = 5$.

6. *Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia* $21^x + 4^y = z^2$. (Primul test pentru OBMJ, 2015)

Soluţie. Ecuaţia considerată este echivalentă cu

$$(z - 2^y)(z + 2^y) = 21^x.$$

Dacă d este un divizor comun al numerelor $z - 2^y$ şi $z + 2^y$, atunci $d \mid 21^x$ şi $d \mid 2^{y+1}$, de unde rezultă că $d = 1$. Deci, numerele $z - 2^y$ şi $z + 2^y$ sunt prime între ele. Având în vedere că $z - 2^y < z + 2^y$, distingem următoarele două cazuri.

Pentru $z - 2^y = 1$ şi $z + 2^y = 21^x$, rezultă că $21^x - 1 = 2^{y+1}$, ceea ce este fals, deoarece 5 divide membrul stâng, dar nu şi pe cel drept.

Pentru $z - 2^y = 3^x$, $z + 2^y = 7^x$, avem $7^x - 3^x = 2^{y+1}$. Cum $4 \mid 7 - 3$, putem aplica Lema 3; obţinem: $v_2(7^x - 3^x) = v_2(7 - 3) + v_2(x) = v_2(x) + 2$. Dar, $v_2(7^x - 3^x) = v_2\left(2^{y+1}\right) = y + 1$. Deci, $y + 1 = v_2(x) + 2$. Din ultima relaţie rezultă uşor inductiv că, pentru $x \geq 3$, trebuie ca $x \geq y + 1$, de unde reiese că $2^{y+1} + 3^x = 7^x \leq 2^x + 3^x < 3^x + 3^x < 3^{x+1} < 7^x$, ceea ce este fals. Rămâne de analizat cazul $x \leq 2$, din care rezultă doar soluţia $x = 1, y = 1, z = 5$.

7. *Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia* $52^n - 3^n = 7(13^{7^x n} - 6^{7^x n})$. (*Răzvan Andrei Morariu*)

Soluţie. Conform Lemei 1, avem:

$$v_7(52^n - 3^n) = v_7(52 - 3) + v_7(n) = 2 + v_7(n),$$

$$v_7(7(13^{7^x n} - 6^{7^x n})) = 1 + v_7\left(13^{7^x n} - 6^{7^x n}\right) = 1 + v_7(13 - 6) + v_7(7^x n) = 2 + x + v_7(n).$$

Cum $52^n - 3^n = 7\left(13^{7^x n} - 6^{7^x n}\right)$, reiese că $x = 0$. Rămâne de rezolvat ecuaţia

$$52^n - 3^n = 7(13^n - 6^n) \qquad \text{echivalentă cu} \qquad 52^n + 7 \cdot 6^n = 7 \cdot 13^n + 3^n.$$

Pentru $n \geq 2$, avem $7 \cdot 6^n > 3^n$ şi $52^n > 7 \cdot 13^n$, de unde rezultă că $52^n + 7 \cdot 6^n > 7 \cdot 13^n + 3^n$, ceea ce contrazice relaţia precedentă.

Pentru $n = 1$ şi $x = 0$, ecuaţia este verificată şi aceasta este singura soluţie a ecuaţiei date.

8. *Determinaţi toate numerele întregi pozitive n pentru care* $n^{n-1} - 1$ *se divide cu* 2^{2015}, *dar nu se divide cu* 2^{2016}. (Baltic Way, 2015)

Soluţie. Ipoteza problemei este echivalentă cu $v_2\left(n^{n-1} - 1\right) = 2015$.

Dacă $n = 1$, atunci $n^{n-1} - 1 = 0$, deci $n^{n-1} - 1$ se divide cu 2^{2016}, ceea ce înseamnă că $n = 1$ nu este soluţie a problemei.

Dacă n ar fi par, atunci $n^{n-1} - 1$ ar fi impar, adică $v_2\left(n^{n-1} - 1\right) = 0$. Aşadar, nici în acest caz nu avem soluţii.

Presupunem că n este număr impar mai mare ca 1. Conform Lemei 4, avem:

$$v_2\left(n^{n-1}-1\right)=v_2(n-1)+v_2(n+1)+v_2(n-1)-1=2v_2(n-1)+v_2(n+1)-1.$$

Dacă $n\equiv 1 \pmod 4$, atunci $n+1\equiv 2 \pmod 4$, deci $v_2(n+1)=1$. Aşadar, $2015=v_2\left(n^{n-1}-1\right)=2v_2(n-1)+v_2(n+1)-1=2v_2(n-1)$, ceea ce este fals.

Dacă $n\equiv 3 \pmod 4$, atunci $n-1\equiv 2 \pmod 4$, adică $v_2(n-1)=1$. Aşadar, $2015=v_2\left(n^{n-1}-1\right)=2v_2(n-1)+v_2(n+1)-1=1+v_2(n+1)$, de unde obţinem că $v_2(n+1)=2014$.

Prin urmare, soluţiile ecuaţiei şi problemei sunt date de $n=2^{2014}k-1$, unde k este un număr natural impar.

9. *Fie a şi b două numere întregi pozitive. Găsiţi numerele naturale impare n şi m pentru care*

$$\frac{(5^n-2^n)(5^m+2^m)}{3^a\cdot 7^b}$$

este un număr întreg, prim cu 21. (*Vlad Tuchiluş*)

Soluţie. Deoarece $5^n-2^n\equiv(-2)^n-2^n \pmod 7$ şi n este impar, rezultă că $(-2)^n-2^n\equiv -2^{n+1} \pmod 7$. De aici, având în vedere că 2 şi 7 sunt prime între ele, reiese că 7 nu divide 5^n-2^n. De asemenea, $5^m+2^m\equiv 2^m+2^m\equiv 2^{m+1} \pmod 3$ şi, cum numerele 2, 3 sunt prime între ele, 3 nu divide 5^m+2^m.

Aşadar, deoarece 7 nu divide 5^n-2^n şi 3 nu divide 5^m+2^m, pentru ca numărul $\dfrac{(5^n-2^n)(5^m+2^m)}{3^a\cdot 7^b}$ să fie întreg şi prim cu 21, este necesar şi suficient ca $v_3(5^n-2^n)=a$ şi $v_7(5^m+2^m)=b$.

Conform Lemei 1, obţinem:

$$v_3(5^n-2^n)=v_3(5-2)+v_3(n)=1+v_3(n),$$

iar, conform Lemei 2, avem:

$$v_7(5^m+2^m)=v_7(5+2)+v_7(m)=1+v_7(m).$$

Dacă $v_3(5^n-2^n)=a$, atunci $v_3(n)=a-1$; aşadar, $n=3^{a-1}\cdot k$, unde k este un număr natural prim cu 6.

Dacă $v_7(5^m+2^m)=b$, găsim $v_7(m)=b-1$, de unde obţinem că $m=7^{b-1}\cdot l$, unde l este un număr natural, prim cu 14.

Prin urmare, $(n,m)\in\left\{\left(3^{a-1}\cdot k,\ 7^{b-1}\cdot l\right)\mid k,l\in\mathbb{N},\ (k,6)=1,\ (l,14)=1\right\}$.

Bibliografie

1. – AoPS topic #324597, *Lifting The Exponent Lemma (LTE)*, posted by **A.H. Parvardi**: *http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=324597*

2. L. Panaitopol, Al. Gica – *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor. Idei şi metode de rezolvare*, Editura GIL, Zalău, 2006.

3. – *Gazeta Matematică*, seria B.