NOTA ELEVULUI

Transversale izogonale şi aplicaţii

Ştefan DOMINTE [1]

Abstract. In this paper, a number of properties of the isogonal transversals with respect to a triangle are presented, together with some of their applications.

Keywords: isogonal transversals, incircle, Conway′s circle.

MSC 2010: 51M04.

Vom prezenta mai întâi o extindere simplă a noţiunii de *ceviene izogonale*, iar apoi câteva aplicaţii ale sale. Fie $\widehat{xAy}$ un unghi cu vârful în A şi d_1, d_2 două drepte în planul acestui unghi, care nu sunt paralele cu laturile Ax şi Ay. Notăm cu M şi N intersecţiile dreptei d_1 cu Ax, respectiv Ay , iar cu P şi Q intersecţiile dreptei d_2 cu Ax, respectiv Ay.

Definiţie. Dreptele d_1 şi d_2 sunt *transversale izogonale* în raport cu unghiul $\widehat{xAy}$ dacă este îndeplinită condiţia $\widehat{MNQ} \equiv \widehat{MPQ}$ (fig. 1).

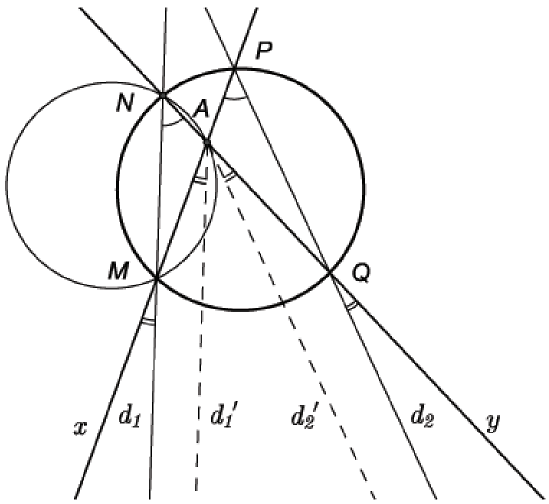

Fig. 1

Vom înşira un număr de observaţii şi proprietaţi relativ la noţiunea introdusă.

1. Condiţia din definiţie este echivalentă cu faptul că $\widehat{xMd_1} \equiv \widehat{yQd_2}$, căci, în una sau alta dintre aceste condiţii, patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

2. Dacă dreptele d_1, d_2 trec prin vârful A, (adică, dacă patrulaterul $MNPQ$ se ,,contractă" la punctul A), atunci transversalele izogonale d_1, d_2 devin cevienele izogonale d_1', d_2'.

3. Spre deosebire de cazul cevienelor izogonale, exista o infinitate de transversale izogonale care fac un unghi dat cu Ax, respectiv Ay: dacă (d_1, d_2) este o astfel de pereche, atunci, luând $d_1^* \parallel d_1$ şi $d_2^* \parallel d_2$, perechea (d_1^*, d_2^*) este formată de asemenea din transversale izogonale.

Mai precis, dată o transversală d_1, prin orice punct al planului trece o transversală d_2 izogonală cu d_1 (subînţeles, în raport cu unghiul $\widehat{xAy}$). Într-adevăr, fie M şi N

[1] Elev, cl. a XI-a, Liceul Internaţional de Informatică, Bucureşti; *stef_dominte@yahoo.com*

punctele în care d_1 intersectează semidreptele Ax, respectiv Ay. Un cerc oarecare construit prin M şi N intersectează Ax în U şi Ay în V. Evident, dreapta UV, cât şi orice paralelă la ea, este o transversală izogonală cu d_1. Dacă cercul trece şi prin A, adică este circumcris triunghiului $\triangle AMN$ (fig.1), atunci dreapta UV - tangenta în A la cerc - va fi ceviana izogonală cu transversala d_1.

4. Odată cu perechea (MN, PQ) şi (MQ, NP) este pereche de transversale izogonale în raport cu $\widehat{xAy}$ (fig.1).

5. Se ştie că bisectoarea unghiului este izogonală cu ea însăşi. Se constată uşor că bisectoarei unghiului $\widehat{xAy}$ îi corespund perechile de transversale izogonale (d_1, d_2) cu particularitatea că $d_1 \parallel d_2$; într-adevăr, cevienele paralele cu d_1 şi d_2 vor coincide, anume, vor fi tocmai bisectoarea unghiului $\widehat{xAy}$. Patrulaterul $MNPQ$ este, în acest caz, trapez isoscel cu bazele MN şi PQ.

Vom continua această listă într-un nou cadru: considerăm unghiul $\widehat{xAy}$ ca fiind unghiul $\widehat{BAC}$ al unui triunghi dat $\triangle ABC$.

6. Dacă (d_1, d_2) şi (δ_1, δ_2) sunt două perechi de transversale izogonale în raport cu unghiul $\widehat{A}$, atunci $d_1 \parallel \delta_1 \Longrightarrow d_2 \parallel \delta_2$. În particular, au loc implicaţiile:

(i) $d_1 \perp BC \Longrightarrow d_2 \parallel AO$, unde O este centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.

(ii) $d_1 \parallel AA' \Longrightarrow d_2 \parallel AA''$, unde AA' şi AA'' sunt mediana, respectiv simediana ce pleacă din vârful A.

7. O pereche (d_1, d_2) de transversale izogonale obţinută dintr-o pereche de ceviene izogonale prin deplasare ,,echidistantă" se caracterizează prin faptul că patrulaterul $MNPQ$ este trapez isoscel cu bazele MQ şi NP.

8. **Formulă de tip Steiner**. *Date transversalele d_1, d_2 izogonale în raport cu unghiul $\widehat{A}$ al triunghiului $\triangle ABC$, să notăm D_1, N, M intersecţiile dreptei d_1 cu BC, CA, respectiv AB, iar cu D_2, Q, P intersecţiile similare ale dreptei d_2 (fig. 2). Atunci are loc egalitatea*

$$\frac{D_1B}{D_1C} \cdot \frac{D_2B}{D_2C} = \frac{P_{\mathcal{C}_a}(B)}{P_{\mathcal{C}_a}(C)},$$

unde $P_{\mathcal{C}_a}(X)$ semnifică puterea punctului X faţă de cercul $\mathcal{C}_a$ determinat de punctele M, N, P, Q.

Demonstraţie. Cu teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile $\triangle BD_1M$ şi $\triangle CD_1N$, avem: $\dfrac{D_1B}{D_1C} = \dfrac{BM \sin \widehat{BMD_1}}{CN \sin \widehat{CND_1}}$; analog, apelând la $\triangle BD_2P$ şi $\triangle CD_2Q$, avem: $\dfrac{D_2B}{D_2C} = \dfrac{BP \sin \widehat{BPD_2}}{CQ \sin \widehat{CQD_2}}$. Prin înmulţire şi ţinând cont de faptul că $\widehat{BMD_1} \equiv \widehat{CQD_2}$ şi $\widehat{CND_1} \equiv \widehat{BPD_2}$, obţinem: $\dfrac{D_1B}{D_1C} \cdot \dfrac{D_2B}{D_2C} = \dfrac{BM \cdot BP}{CN \cdot CQ} = \dfrac{P_{\mathcal{C}_a}(B)}{P_{\mathcal{C}_a}(C)}$, de unde deducem relaţia cerută.

În continuare, prin probleme, vom vedea utilitatea noţiunii de transversale izogonale.

Problema 1. *Arătaţi că, dacă transversalele d_1 şi d_2 sunt izogonale şi izotomice (i.e., picioarele lor, $D_1, D_2 \in BC$, sunt puncte izotomice în raport cu BC), atunci locul centrelor cercurilor $\mathcal{C}_a$ (fig. 2) este mediatoarea segmentului BC.*

Soluţie. Cu uşurinţă se arată echivalenţa între cerinţa ca D_1, D_2 să fie izotomice în raport cu BC şi relaţia $\dfrac{D_1B}{D_1C} \cdot \dfrac{D_2B}{D_2C} = 1$. Ca urmare, având în vedere proprietatea 8 de mai sus, avem de găsit locul geometric al centrului cercului $\mathcal{C}_a$ pentru care $P_{\mathcal{C}_a}(B) = P_{\mathcal{C}_a}(C)$. Notând cu Ω şi ρ centrul şi raza cercului $\mathcal{C}_a$, ultima egalitate se traduce prin $B\Omega^2 - \rho^2 = C\Omega^2 - \rho^2$, adică prin condiţia $B\Omega = C\Omega$. În final, locul geometric al centrului Ω este mediatoarea segmentului BC.

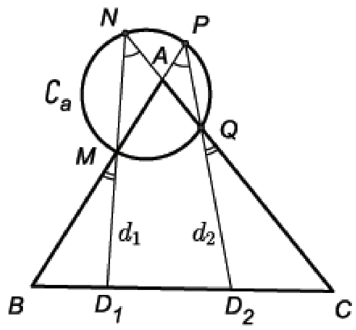

Fig. 2

Problema 2. *Fie dat $\triangle ABC$ şi fie D, E, F mijloacele laturilor BC, CA,* respectiv *AB. Fie punctele P pe AC şi Q pe AB astfel încât dreptele PF şi QE sunt izogonale. Fie R simetricul lui Q faţă de F şi T simetricul lui P faţă de E. Fie M şi N pe BC astfel încât perechile de drepte MF şi RD, EN şi TD sunt izogonale. Atunci D este mijlocul segmentului MN.*

Soluţie. Ţinând seama de proprietăţile transversalelor izogonale, rezultă că patrulaterele $FPQE$, $FDRM$ şi $DENT$ sunt inscriptibile. Folosind puterea punctului, obţinem: $MB \cdot BD = RB \cdot BF = FA \cdot AQ = PA \cdot AE = EC \cdot CT = DC \cdot CN$, de unde deducem că $MB = CN$, deci punctul D este mijlocul segmentului MN.

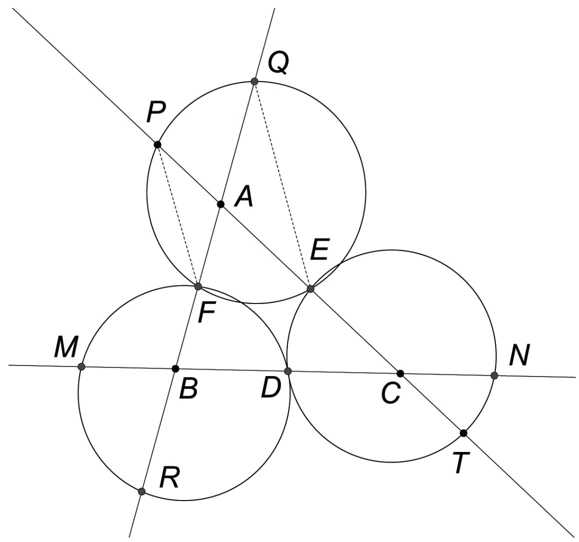

Fig. 3

Problema 3. *Fie $\triangle ABC$, I centrul cercului înscris şi D, E, F punctele de contact ale acestuia cu laturile BC, CA, respectiv AB. Pe laturile AB şi AC, consideram punctele M şi Q astfel încât $AM = AQ = BC$ şi $B - A - M$, $C - A - Q$. Analog definim punctele N, K şi L, P. Atunci, (QF, ME) este o pereche de transversale izogonale în raport cu $\widehat{A}$, iar oricare două dintre transversalele MQ, EF, PN formează o pereche cu aceeaşi proprietate. În raport cu unghiurile $\widehat{B}$* şi *$\widehat{C}$ sunt adevărate afirmaţiile similare.*

Soluţie. Considerăm cunoscut faptul că punctele Q, M, L, P, N, K sunt conciclice pe un cerc cu centrul în I, *cercul lui Conway* [**2**]. Pentru prima afirmaţie, observăm că $AQ \cdot AE = AM \cdot AF$, deci patrulaterul $QFEM$ este inscriptibil; mai mult, el este trapez isoscel cu $QF = ME$ (după cum rezultă din congruenţa triunghiurilor AQF şi AME). Deci, QF, ME sunt transversale izogonale şi, în plus, vârful A este echidistant faţă de ele.

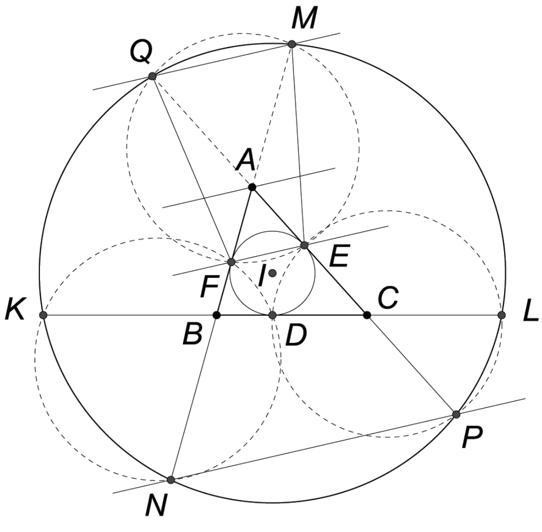

Fig. 4

Pentru a doua afirmaţie, este suficient să observăm că transversalele MQ, EF, PN sunt paralele cu bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{A}$ şi fac cu laturile AB şi AC unghiuri de măsură $\dfrac{B+C}{2}$ (se apelează la triunghiurile isoscele AMQ, AEF, APN).

Problema 4. *Fie $\triangle ABC$, O centrul cercului circumscris şi un punct P în interiorul lui. Fie D şi E prioecţiile lui P pe AC, respectiv AB. Fie B' şi C' simetricele lui B şi C faţă de E şi D. Atunci, transversalele izogonale cu $B'C'$ în raport cu unghiul $\widehat{A}$ sunt perpendiculare pe OP.*

Soluţie. Fie M şi N mijloacele lui AB, respectiv AC şi S şi T picioarele perpendicularelor din P pe OM şi ON. Este de ajuns să arătăm că tangenta în A la cercul $(AB'C')$ este perpendiculară pe OP.

Este uşor de observat că $PS \parallel AB'$ şi $PT \parallel AC'$. Cu un calcul simplu de segmente deducem că $AB' = 2ME = 2PS$ şi $AC' = 2DN = 2PT$. Aşadar, $\triangle AB'C'$ şi $\triangle PST$ sunt omotetice. Cum m$(\widehat{PSO})$ =m$(\widehat{PTO}) = 90°$, centrul cercului triunghiului $\triangle PST$ este situat pe dreapta PO. Ca urmare, tangenta în P la cercul (PST), care e paralelă cu tangenta în A la cercul $(AB'C')$, este perpendiculară pe OP.

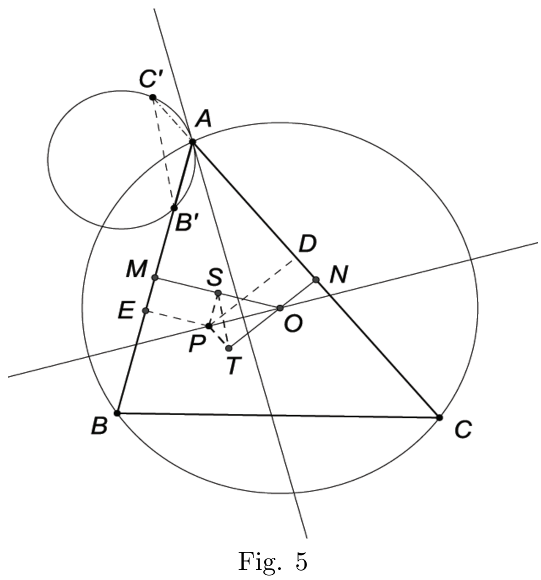

Fig. 5

Bibliografie

1. **T. Lalescu** – *Geometria triunghiului*, Ed. Tineretului, 1958.
2. – *http://mathworld.wolfram.com/ConwayCircle.html*