NOTA ELEVULUI

Aplicaţii ale teoremei lui McCoy

Irina CRISTALI [1]

Abstract. In this Note, the McCoy′s theorem (see formula (3)) is used to solve several problems given at some contests and olympiads.

Keywords: matrix, characteristic polinomial, Cayley-Hamilton theorem, McCoy theorem.

MSC 2010: 97D40, 15A18.

În acest articol, sunt prezentate câteva rezultate remarcabile care conduc către *teorema lui McCoy*, un instrument foarte util în rezolvarea anumitor probleme de algebră liniară, unele de dificultate sporită.

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vom nota cu $Sp(A)$ (*spectrul matricei* A) n-uplul format din valorile proprii repetate corespunzător cu ordinele lor de multiplicitate.

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte *unitară* dacă

$$A^t \cdot \overline{A} = I_n. \tag{1}$$

Teorema 1 (Schur). *Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, există o matrice unitară S astfel încât*:

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei A.

Acest rezultat arată că orice matrice este *unitar-echivalentă* cu o matrice *superior-triunghiulară*, fapt fundamental în teoria elementară a matricelor.

Teorema 2. *Fie $F = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ o familie comutativă de matrice (i.e. $A_iA_j = A_jA_i, \forall\, A_i, A_j \in F$). Atunci, există o matrice unitară S astfel încât matricele*

$$S \cdot A_i \cdot S^{-1}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

sunt superior-triunghiulare.

Pentru demonstraţiile teoremelor 1 şi 2 se poate consulta [**3**].

O consecinţă importantă a celor prezentate mai sus este

Teorema 3 (McCoy). *Considerăm o familie comutativă de matrice $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $Sp(A_i) = [\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}]$, respectând ordinea impusă de (2). Atunci, pentru orice polinom $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_k]$, avem că*

$$Sp\left(f\left(A_1, A_2, \dots, A_k\right)\right) = \left\{f\left(\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \dots, \lambda_{ki}\right) \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\right\}. \tag{3}$$

[1] Elevă, cl. a XI-a, Col. Naţ. de Inf. „Tudor Vianu", Bucureşti; e-mail: *irina.cristali@gmail.com*

Observaţie. Fie A, B două matrice care comută, cu $Sp(A) = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, $Sp(B) = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$. Conform teoremei 2, există o matrice unitară S astfel încât:

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad S \cdot B \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ 0 & \beta_2 & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Aşadar,

$$S \cdot (A + B) \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & u_{12} + v_{12} & \ldots & u_{1n} + v_{1n} \\ 0 & \alpha_2 + \beta_2 & \cdots & u_{2n} + v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix},$$

adică $A + B$ este unitar-echivalentă cu o matrice superior-triunghiulară, care are spectrul $[\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n]$. Rezultatul obţinut este un caz particular al teoremei 3.

În cele ce urmează, vom utiliza *teorema lui McCoy* în scopul rezolvării unor probleme de olimpiadă, soluţiile date fiind diferite de cele cunoscute.

Problema 1. *Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu proprietăţile $B^2 = I_n$ şi $A^2 = AB + I_n$. Arătaţi că* $\det A \le \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. (**M. Cavachi**; ONM, etapa jud., 2007)

Soluţie. Să arătăm că matricele A şi B comută. Condiţia $A^2 = AB + I_n$ se scrie $A^2 - AB = I_n$ (i). Din (i) urmează: $A(A-B) = I_n \Rightarrow (A-B)A = I_n \Rightarrow A^2 - BA = I_n$ (ii). Din relaţiile (i) şi (ii) rezultă că $AB = BA$.

Cum $B^2 = I_n$, atunci orice valoare proprie β a lui B satisface $\beta^2 = 1$. Rezultă că $\beta \in \{-1, +1\}$.

Fie $Sp(A) = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$. Cum $A^2 - AB - I_n = O_n$, utilizând *teorema McCoy*, deducem că $\lambda_i^2 \pm \lambda_i - 1 = 0$ şi obţinem că $\lambda_i \in \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. În fiecare dintre aceste situaţii, $|\lambda_i| \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Cum $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$, rezultă că $|\det(A)| \le \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, q.e.d.

Problema 2. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice astfel încât $AB = BA$, $A^{2013} = I_n$ şi $B^{2014} = I_n$. Demonstraţi că matricea $A + B + I_n$ este inversabilă.*

Soluţie. Să presupunem, prin absurd, că $\det(A + B + I_n) = 0$. Atunci 0 este una dintre valorile proprii ale matricei $A + B + I_n$. Conform *teoremei lui McCoy*, există o valoare proprie a lui A, α, şi o valoare proprie a lui B, β, astfel încât $\alpha + \beta + 1 = 0$. Deoarece $A^{2013} = I_n$, respectiv $B^{2014} = I_n$, avem că $\alpha^{2013} = 1$, respectiv $\beta^{2014} = 1$.

În particular, $|\alpha| = |\beta| = 1$. Cum 3 numere complexe de acelaşi modul au suma 0 dacă şi numai dacă formează un triunghi echilateral, înseamnă că 1, α şi β formează un triunghi echilateral. Rezultă că α şi β sunt rădăcinile primitive de ordinul 3 ale unităţii. În particular, $\beta^3 = 1$, de unde $\left(\beta^3\right)^{671} = 1$, deci $\beta^{2015} = 1$. Ţinând cont că $\beta^{2014} = 1$, obţinem că $\beta = 1$, care nu este rădăcină primitivă de ordinul 3 a unităţii, contradicţie. Deci $A + B + I_n$ este inversabilă.

Problema 3. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$. Să se demonstreze că* $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$, $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$ *pentru care $AB = BA$, dacă şi numai dacă $A^n = O_n$.*

Soluţie. „$\Rightarrow$” Pentru $B = A$, rezultă că

$$\det(2A) = 2\det(A) \Rightarrow (2^n - 2)\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0,$$

deoarece $n \geq 2$. Pentru $B = -xI_n$, avem:

$$\det\left(A - xI_n\right) = \det(A) + (-1)^n x^n \Rightarrow \det\left(A - xI_n\right) = (-1)^n x^n,$$

deci polinomul caracteristic al lui A este $P_A(x) = (-1)^n x^n$. Conform *teoremei Cayley-Hamilton*, avem că $P_A(A) = O_n$, de unde $A^n = O_n$.

„$\Leftarrow$” Deoarece $A^n = O_n$, polinomul caracteristic al lui A este $(-1)^n x^n$, deci toate valorile proprii ale lui A sunt nule. Conform *teoremei lui McCoy*, orice valoare proprie a lui $A + B$ este suma dintre o valoare proprie a lui A (adică 0) şi o valoare proprie a lui B. Astfel,

$$Sp(A + B) = Sp(B) \Rightarrow \det(A + B) = \det(B).$$

Ţinând cont că $\det(A) = 0$, obţinem concluzia.

Problema 4. *Fie*

$$M = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det(A - zI_2) = 0 \Rightarrow |z| < 1\right\}.$$

Să se demonstreze că dacă $A, B \in M$ şi $AB = BA$, atunci $A \cdot B \in M$. (ONM, etapa finală, 2000)

Soluţie. Fie $A, B \in M$. Notăm $Sp(A) = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, respectiv $Sp(B) = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$, cu ordinea impusă de (2). Evident, putem scrie:

$$M = \left\{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid |z| < 1,\ z \in Sp(A)\right\}.$$

Conform *teoremei lui McCoy*, $Sp(AB) = [\alpha_1 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2, \ldots, \alpha_n \cdot \beta_n]$. Aşadar, din $A, B \in M$ avem că $|\alpha_i| < 1$ şi $|\beta_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$, de unde $|\alpha_i \beta_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$, ceea ce arată că $A \cdot B \in M$.

Problema 5. *Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in N^*$. Dacă $A^2 = B^3 = I_n$ şi $AB = BA$, să se arate că $\det(A + B + I_n) = 3^k$, unde k este număr natural.*

Soluţie. Fie $Sp(A) = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, respectiv $Sp(B) = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$. Cum $A^2 = I_n$, avem că orice valoare proprie α_i a lui A satisfice relaţia $\alpha_i^2 = 1$, deci

$\alpha_i \in \{-1, +1\}$, oricare ar fi $i = \overline{1,n}$. Analog, din faptul că $B^3 = I_n$ deducem că $\beta_i \in \{1, \varepsilon, \overline{\varepsilon}\}$, oricare ar fi $i = \overline{1,n}$, ε fiind rădăcină nereală de ordinul 3 a unităţii.

Din *teorema lui McCoy*,

$$Sp(A + B + I_n) = [\alpha_1 + \beta_1 + 1, \alpha_2 + \beta_2 + 1, \ldots, \alpha_n + \beta_n + 1],$$

deci

$$\det(A + B + I_n) = (\alpha_1 + \beta_1 + 1)(\alpha_2 + \beta_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + \beta_n + 1).$$

Pentru orice $i = \overline{1,n}$, avem

$$\alpha_i + \beta_i + 1 \in \{1+1+1, 1+\varepsilon+1, 1+\overline{\varepsilon}+1, -1+1+1, -1+\varepsilon+1, -1+\overline{\varepsilon}+1\} =$$
$$= \{3, 2+\varepsilon, 2+\overline{\varepsilon}, 1, \varepsilon, \overline{\varepsilon}\}.$$

Deoarece $A + B + I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, polinomul caracteristic al acesteia are coeficienţi reali şi deci ordinul de multiplicitate al unei valori propri complexe nereale coincide cu ordinul de multiplicitate al conjugatei acesteia. Cum $\varepsilon \cdot \overline{\varepsilon} = 1$ şi $(2+\varepsilon)(2+\overline{\varepsilon}) = 3$, înseamnă că produsul valorilor proprii ale lui $A + B + I_n$ este o putere a lui 3, ceea ce trebuia demonstrat.

Bibliografie

1. **Gh. Andrei, C. Caragea, Gh. Bordea** – *Algebră pentru concursuri de admitere şi olimpiade şcolare*, Editura TopAZ, Constanţa, 1993.
2. **D. Buşneag, F. Chirteş, D. Piciu** – *Complemente de algebră*, Editura Gil, Zalău, 2006.
3. **R.A. Horn, Ch. R. Johnson** – *Analiză matricială*, Editura Theta, Bucureşti, 2001.

Recreaţii ... matematice

Să se completeze înmulţirile:

$$\begin{array}{r} * * * \\ * * \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline \mathbf{2\,0\,1\,3} \end{array} \qquad \begin{array}{r} * * * \\ * * \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline \mathbf{2\,0\,1\,4} \end{array} \qquad \begin{array}{r} * * * \\ * * \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline \mathbf{2\,0\,1\,5} \end{array}$$

T. Bîrsan

(*Răspuns la pag. 39*)