NOTA ELEVULUI

Câteva proprietăţi remarcabile ale triunghiului dreptunghic

Andi Gabriel BROJBEANU [1]

Abstract. In this Note, starting from a couple of properties of the right-angled triangle presented in [**1**]-page 55, a couple of characteristic properties for this type of triangles are obtained.
Keywords: right-angled triangle, altitude, incenter, concyclic points.
MSC 2010: 51M04.

Subiectul acestei Note este sugerat de figurile 4.10.2) şi 4.10.3) din [**1**], p.55. Menţionăm că această carte este o colecţie de teoreme de geometrie ,,enunţate" în figuri nenotate şi neînsoţite de text; datele teoremei sunt sugerate de figură, concluzia fiind ilustrată cu linii punctate.

Ne propunem să vedem în ce măsură proprietăţile indicate pe aceste figuri sunt caracteristice triunghiurilor dreptunghice.

Vom utiliza în mod frecvent următoarele rezultate:

Lema 1. *Fie I incentrul triunghiului ABC. Avem:*

$$AI = \frac{2AB \cdot AC}{BC + CA + AB} \cos \frac{A}{2}.$$

Lema 2. *Fie r raza cercului înscris în triunghiul ABC dreptunghic în A. Are loc relaţia*:

$$r = \frac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

Propoziţia 1. *Fie ABC un triunghi cu proprietatea că proiecţia D* a *vârfului A pe BC se află pe (BC). Dacă I_1, I_2 sunt incentrele triunghiurilor ADB, respectiv ADC şi M, N sunt proiecţiile lor pe AB, respectiv AC, atunci I_1M şi I_2N se intersectează pe $BC \Leftrightarrow$ triunghiul ABC este dreptunghic în A.*

Demonstraţie. Notăm $\{P\} = I_1M \cap BC$ şi $\{Q\} = I_2N \cap BC$. Să observăm mai întâi că din $I_1M \perp AB$ şi $I_2N \perp AC$ rezultă că

$$(1) \quad BP = \frac{BM}{\cos B} = \frac{AB + BD - AD}{2\cos B} \quad \text{şi} \quad CQ = \frac{CN}{\cos C} = \frac{AC + CD - AD}{2\cos C},$$

[1] Elev, cl. a XI-a, Colegiul Naţional ,,C. Carabella", Târgovişte; e-mail: *andi_bro@yahoo.com*

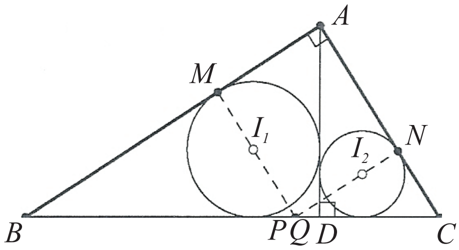

Fig. 1

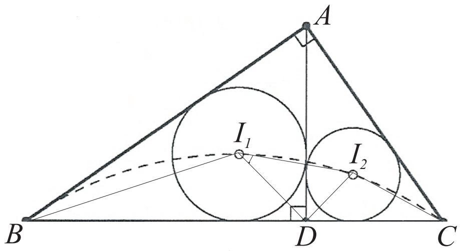

Fig. 2

iar din $AD \perp BC$ rezultă că

$$(2) \qquad AD = b\sin C = c\sin B, \quad BD = c\cos B, \quad CD = b\cos C.$$

Ca urmare, obţinem:

$$(3) \qquad BP + CQ = \frac{c(1+\cos B - \sin B)}{2\cos B} + \frac{b(1+\cos C - \sin C)}{2\cos C}.$$

„$\Leftarrow$" Dacă $A = \dfrac{\pi}{2}$, ţinând seama de (3) şi de faptul că $\cos B = \sin C$ şi $\sin B = \cos C$, rezultă că $BP + CQ = \dfrac{a}{2}(1+\cos B - \sin B) + \dfrac{a}{2}(1+\cos C - \sin C) = a$, adică $P \equiv Q$, deci I_1M şi I_2N se intersectează pe BC.

„$\Rightarrow$" Dacă $P \equiv Q$, avem:

$$BP + CQ = a \quad \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\sin C\cdot(1+\cos B - \sin B)}{2\cos B} + \frac{\sin B\cdot(1+\cos C - \sin C)}{2\cos C} = \sin A$$

Ultima egalitate se scrie $\sin C\cos C + \sin B\cos B + \sin C\cos B\cos C + \sin B\cos B\cos C - \sin B\sin C\cos C - \sin B\sin C\cos B = 2\sin(B+C)\cos B\cos C$ sau, încă, $\dfrac{1}{2}(\sin 2B + \sin 2C) + \dfrac{1}{2}(\cos(B+C) + \cos(B-C))(\sin B + \sin C) + \dfrac{1}{2}(\cos(B-C) - \cos(B+C))\cdot(\cos B + \cos C) = 2\sin(B+C)\cdot\dfrac{1}{2}(\cos(B+C) + \cos(B-C))$.

Cu notaţiile $\sin\dfrac{B+C}{2} = x, \sin\dfrac{B-C}{2} = y, \cos\dfrac{B+C}{2} = z, \cos\dfrac{B-C}{2} = t$, $x, z, t \in (0,1], y \in (-1,1)$, obţinem:

$$2xz(t^2-y^2) + xt(z^2-x^2+t^2-y^2) + zt(z^2-x^2-t^2+y^2) = 2xz(z^2-x^2+t^2-y^2) \Leftrightarrow$$

$$(t^2-y^2)(xt-zt) = (z^2-x^2)(2xz-xt-zt) \Leftrightarrow (x-z)[t(t^2-y^2)-(x+z)(xt+zt-2xz)] = 0.$$

Avem $x = z$ sau $t(t^2-y^2) - (x+z)(xt+zt-2xz) = 0$. Dacă $x = z$, atunci $\tan\dfrac{B+C}{2} = 1$, deci $B + C = \dfrac{\pi}{2}$, adică $A = \dfrac{\pi}{2}$. Dacă $x \neq z$, atunci $t(t^2-y^2) = (x+z)(xt+zt-2xz) \Leftrightarrow 2xz(x+z) = t[(x+z)^2-(t^2-y^2)] \Leftrightarrow 2xz(x+z) = t(1+2xz-1+2y^2)$ $\Leftrightarrow xz(x+z-t) = ty^2 \Leftrightarrow \dfrac{yt}{xz} = \dfrac{x+z-t}{y}$($y \neq 0$:dacă $y = 0$, atunci $t = 1$ şi rezultă $1 = x + z = \sqrt{1+2xz} > 1$, contradicţie).

Dacă $y > 0$, $\dfrac{yt}{xz} = \dfrac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} < 1$ şi $\dfrac{x+z-t}{y} > 1$ ($\Leftrightarrow x+z > y+t \Leftrightarrow 1+2xz > 1+2yt \Leftrightarrow \dfrac{yt}{xz} < 1$, adevărat), deci avem contradicţie.

Dacă $y < 0$, $\dfrac{yt}{xz} = -\dfrac{\sin(C-B)}{\sin(B+C)} > -1$ şi $\dfrac{x+z-t}{y} < -1$ ($\Leftrightarrow x+z > t-y >\Leftrightarrow 1+2xz > 1-2yt \Leftrightarrow \dfrac{yt}{xz} > -1$, adevărat), deci avem contradicţie.

Aşadar, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

Propoziţia 2. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi un punct $D \in (BC)$. Dacă I_1, I_2 sunt incentrele triunghiurilor ADB, respectiv ADC şi M, N proiecţiile lor pe AB, respectiv AC, atunci I_1M şi I_2N se intersectează pe $BC \Leftrightarrow [AD]$ este înălţime sau mediană.*

Demonstraţie. ,,$\Leftarrow$" Dacă $[AD]$ este înălţime, după cum s-a demonstrat anterior, I_1M şi I_2N se intersectează pe BC.

Dacă $[AD]$ este mediană, atunci $AD = BD = CD = \dfrac{a}{2}$ şi, ţinând seama de formulele (1), obţinem: $BP + CQ = \dfrac{c}{2\cos B} + \dfrac{b}{2\cos C} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} = BC$. Deci I_1M şi I_2N se intersectează pe BC.

,,$\Rightarrow$" Dacă I_1M şi I_2N se intersectează pe BC, atunci $BP + CQ = BC$. Dacă $m(\widehat{BAD}) = \alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, atunci cu teorema sinusurilor în triunghiurile ADB şi ADC obţinem că $AD = c\dfrac{\sin B}{\sin(B+\alpha)} = b\dfrac{\cos B}{\sin(B+\alpha)}, BD = c\dfrac{\sin\alpha}{\sin(B+\alpha)}, CD = b\dfrac{\cos\alpha}{\sin(B+\alpha)}$. Cu aceste formule şi cu cele din (1), condiţia $BP + CQ = BC$ se scrie

$$\frac{c(\sin(B+\alpha)+\sin\alpha-\sin B)}{2\cos B} + \frac{b(\sin(B+\alpha)+\cos\alpha-\cos B)}{2\cos C} = a\sin(B+\alpha)$$

sau, deoarece $\cos B = \dfrac{c}{a}$ şi $\cos C = \dfrac{b}{a}$,

$$\sin\alpha - \sin B + \cos\alpha - \cos B = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin\frac{\alpha-B}{2}\cos\frac{\alpha+B}{2} = \sin\frac{\alpha+B}{2}\sin\frac{\alpha-B}{2}.$$

Aşadar, $\sin\dfrac{\alpha-B}{2} = 0$, adică $\alpha = B$ şi $[AD]$ este mediană sau $\cos\dfrac{\alpha+B}{2} = \sin\dfrac{\alpha+B}{2}$ $\Leftrightarrow \tan\dfrac{\alpha+B}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} - B$ şi $[AD]$ este înălţime.

Propoziţia 3. *Fie ABC un triunghi cu proprietatea că proiecţia vârfului A se află pe (BC). Dacă I_1, I_2 sunt incentrele triunghiurilor ADB şi ADC, atunci punctele B, I_1, I_2, C sunt conciclice $\Leftrightarrow$ triunghiul ABC este dreptunghic în A sau isoscel cu $AB = AC$.*

Demonstraţie. ,,$\Leftarrow$" Dacă $AB = AC$, atunci înălţimea $[AD]$ este axă de simetrie a triunghiului şi rezultă uşor că patrulaterul BI_1I_2C este trapez isoscel, deci şi inscriptibil. Aşadar, punctele B, I_1, I_2, C sunt conciclice.

Presupunem că $m(\widehat{A}) = 90°$. Conform Lemei 1, $DI_1 = \dfrac{2AD \cdot DB}{AD + DB + AB} \cos \dfrac{\pi}{4}$ şi $DI_2 = \dfrac{2AD \cdot DC}{AD + DC + AC} \cos \dfrac{\pi}{4}$. În cazul nostru, rezultă că $DI_1 = \dfrac{2\frac{bc}{a} \cdot \frac{c^2}{a}}{\frac{bc}{a} + \frac{c^2}{a} + c} \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2c}{a+b+c} \cdot \dfrac{bc}{a} \cos \dfrac{\pi}{4}$ şi $DI_2 = \dfrac{2b}{a+b+c} \cdot \dfrac{bc}{a} \cos \dfrac{\pi}{4}$. Ca urmare, $\dfrac{DI_2}{DI_1} = \dfrac{b}{c}$ şi, în consecinţă, $\Delta DI_1I_2 \sim \Delta ABC$. Avem $m(\widehat{DI_1I_2}) = B$ şi apoi $m(\widehat{BI_1I_2}) + m(\widehat{I_2CB}) = m(\widehat{BI_1D}) + m(\widehat{DI_1I_2}) + m(\widehat{I_2CB}) = (\pi - \dfrac{B}{2} - \dfrac{\pi}{4}) + B + \dfrac{C}{2} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{B+C}{2} = \pi$, deci patrulaterul BI_1I_2C este inscriptibil, adică punctele B, I_1, I_2, C sunt conciclice.

„$\Rightarrow$" Dacă punctele B, I_1, I_2, C sunt conciclice, atunci $m(\widehat{BI_1I_2}) + \dfrac{C}{2} = \pi$ şi rezultă că $m(\widehat{DI_1I_2}) = m(\widehat{BI_1I_2}) - m(\widehat{BI_1D}) = \pi - \dfrac{C}{2} - (\pi - \dfrac{B}{2} - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{B-C}{2}$. Pe de altă parte, $DI_1 = \sqrt{2}r_1$ şi, conform Lemei 2, avem: $DI_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(AD + BD - AB) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}c(\sin B + \cos B - 1)$; analog, $DI_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b(\sin C + \cos C - 1)$.

În triunghiul dreptunghic DI_1I_2, avem relaţia $\mathrm{tg}(\widehat{DI_1I_2}) = \dfrac{DI_2}{DI_1} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{B-C}{2}\right) = \dfrac{DI_2}{DI_1}$, care se scrie:

$$\begin{aligned}
&\frac{1 + \mathrm{tg}(\frac{B-C}{2})}{1 - \mathrm{tg}(\frac{B-C}{2})} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sin C + \cos C - 1}{\sin B + \cos B - 1} \\
&\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B-C}{2} + \sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{B-C}{2}} = \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2})}{2\sin\frac{B}{2}(\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2})} \\
&\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{B-C}{2} + \sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{B-C}{2}} = \frac{\cos\frac{B}{2}(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2})}{\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2})} \\
&\Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{B-C}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2})} \\
&\Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{B-C}{2}} = \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{B}{2})},
\end{aligned}$$

ceea ce conduce la $\sin\dfrac{B-C}{2} = 0$, adică ΔABC este isoscel cu $AB = AC$, sau la $\cos\dfrac{B-C}{2} - \sin\dfrac{B-C}{2} = 2\cos\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{B}{2} - \sin\dfrac{B}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\dfrac{B+C}{2} = \sin\dfrac{B+C}{2} \Leftrightarrow B + C = \dfrac{\pi}{2}$, adică ΔABC este dreptunghic în A.

Propoziţia 4. *Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi un punct $D \in (BC)$. Dacă I_1, I_2 sunt incentrele triunghiurilor ADB şi ADC, atunci punctele B, I_1, I_2, C sunt conciclice $\Leftrightarrow AD \perp BC$.*

Demonstraţie. „$\Leftarrow$" Dacă $AD \perp BC$, după cum am demonstrat anterior, punctele B, I_1, I_2, C sunt conciclice.

„$\Rightarrow$" Fie $\alpha = m(\widehat{ADB}) \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Vom urma aceeaşi cale ca şi în partea de suficienţă a propoziţiei precedente, utilizând Lema 1 în locul Lemei 2. Şi în prezentul caz ΔDI_1I_2 este dreptunghic în D şi este valabilă relaţia $\mathrm{tg}(\widehat{DI_1I_2}) = \dfrac{DI_2}{DI_1}$. Patrulaterul BI_1I_2C fiind inscriptibil, avem că $m(\widehat{DI_1I_2}) = \pi - \dfrac{C}{2} - \left(\pi - \dfrac{B}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{B-C}{2}$. Cu Lema 1, $DI_1 = \dfrac{2AD \cdot DB}{AD + DB + AB} \cos\dfrac{\alpha}{2}$ şi $DI_2 = \dfrac{2AD \cdot DC}{AD + DC + AC} \sin\dfrac{\alpha}{2}$. Având în vedere şi egalităţile $AD = \dfrac{b \sin C}{\alpha} = \dfrac{c \sin B}{\sin\alpha}$, $BD = \dfrac{c\sin(\alpha + B)}{\sin\alpha}$, $CD = \dfrac{b\sin(\alpha - C)}{\sin\alpha}$, relaţia precedentă, după calcule de rutină, se scrie în forma

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{B-C}{2}\right) = \frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{\alpha - C}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{\alpha+B}{2}}.$$

Separând funcţiile de argument $\dfrac{\alpha}{2}$, se ajunge la ecuaţia

$$\sin C\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{B-C}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}-\sin B=0 \Leftrightarrow \cos B\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-(\cos B-\sin B)\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}-\sin B=0$$

(întrucât $\sin C = \cos B$ şi $\sqrt{2}\sin\dfrac{B-C}{2} = \sin B - \cos B$). În sfârşit, împărţind cu $\cos B \neq 0$, obţinem

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - (1 - \mathrm{tg}B)\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}B = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}B\right) = 0,$$

echivalent cu $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 1$, deci $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, adică $AD \perp BC$.

Bibliografie

1. A.V. Akopian – *Geometry in Figures,* 2011.

Recreaţii ... matematice

Un elev: – Oare de ce o fi murit cartea mea de matematică?
Colegul de bancă: – Pentru că avea prea multe probleme!

***

Profesorul: – Ţi-am citit lucrarea de control... foarte bună! Dar,... e identică cu cea a colegului tău de bancă... Ce părere ai?
Elevul: – Că şi a lui e foarte bună!
Profesorul: – Daa...?!