Asupra unei probleme de extrem

Radu MIRON[1]

Abstract. The purpose of this Note is to give two methods for finding the extremal values of a certain type of rational functions which are subject to quadratic restrictions.

Keywords: maximal value, minimal value, circle, tangent.

MSC 2000: 97D50.

În *Gazeta Matematică* 7-8-9/2010 apare următoarea problemă:

E:14062. *Aflaţi cea mai mică şi cea mai mare valoare a fracţiei* $\dfrac{x-1}{y-1}$, *ştiind că* $x^2+y^2-6x-6y+17=0$. **Susana Costea**

În numărul 3/2011 al Gazetei, pag. 143, este publicată următoarea soluţie:

,,Relaţia dată se scrie sub forma $(x-3)^2+(y-3)^2=1$, de unde rezultă că $(x-3)^2 \le 1$ şi $(y-3)^2 \le 1$ şi de aici $2 \le x \le 4$, $2 \le y \le 4$.

Valoarea fracţiei $\dfrac{x-1}{y-1}$ este minimă când numărătorul $x-1$ este cât mai mic, iar numitorul $y-1$ este cât mai mare. Vom lua $x=2, y=4$ (1) şi cea mai mică valoare a fracţiei este $\dfrac{1}{3}$. Pentru valoarea maximă a fracţiei trebuie să avem $x-1$ cât mai mare şi $y-1$ cât mai mic. Vom lua $x=4$, $y=2$ (2) şi obţinem că valoarea maximă a fracţiei este 3."

Se observă că soluţia prezentată mai sus este greşită, valorile considerate în (1) şi (2) neverificând condiţia $x^2+y^2-6x-6y+17=0$ din enunţ.

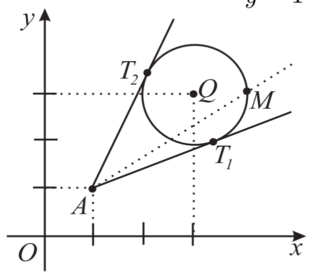
În cele ce urmează prezentăm două metode de abordare pentru problema dată, pe care le vom folosi apoi în rezolvarea altor două probleme de acest tip.

Soluţia 1. Fie $k=\dfrac{x-1}{y-1}$; atunci $x=1+k(y-1)$. Înlocuind în relaţia din ipoteză, obţinem că $y^2(k^2+1)-y(2k^2+4k+6)+(k^2+4k+12)=0$. Cum $y\in\mathbb{R}$, rezultă că $\Delta_y \ge 0$. După calcule, $\Delta_y = 12k^2+32k-12$ şi de aici $k\in\left[\dfrac{4-\sqrt{7}}{3},\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right]$, adică $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3} \le \dfrac{x-1}{y-1} \le \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ pentru orice x,y ca în ipoteza problemei.

Observăm că $\dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$ pentru $x=\dfrac{11-\sqrt{7}}{3}$, $y=\dfrac{11+\sqrt{7}}{3}$, care verifică $x^2+y^2-6x-6y+17=0$. Apoi, $\dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ pentru $x=\dfrac{11+\sqrt{7}}{3}$, $y=\dfrac{11-\sqrt{7}}{3}$, care verifică relaţia dorită. În concluzie, valorile extreme ale fracţiei date sunt $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$, respectiv $\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$.

[1] Elev, Liceul Teoretic ,,Dimitrie Cantemir", Iaşi

Soluţia 2. Într-un sistem cartezian xOy, ecuaţia $(x-3)^2+(y-3)^2=1$ reprezintă un cerc de centru $Q(3,3)$ şi rază $r=1$. Fie $A(1,1)$ şi $M(x,y)$ un punct situat pe cerc, atunci $\dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{1}{m_{AM}}$, unde m_{AM} este panta dreptei AM. Fracţia $\dfrac{x-1}{y-1}$ are valoare minimă atunci când m_{AM} este maximă, deci când AM coincide cu tangenta ,,superioară" AT_2 la cerc. Analog, $\dfrac{x-1}{y-1}$ are valoare maximă dacă m_{AM} este minimă, adică atunci când AM coincide cu tangenta ,,inferioară" AT_1 la cerc. Găsim imediat ecuaţiile tangentelor $AT_1 : y-1=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}(x-1)$, $AT_2 : y-1=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}(x-1)$ şi coordonatele punctelor de contact cu cercul: $T_1\left(\dfrac{11+\sqrt{7}}{4},\dfrac{11-\sqrt{7}}{4}\right)$, respectiv $T_2\left(\dfrac{11-\sqrt{7}}{4},\dfrac{11+\sqrt{7}}{4}\right)$. Rezultă că $\left(\dfrac{x-1}{y-1}\right)_{\min}=\dfrac{1}{m_{AT_2}}=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$, iar $\left(\dfrac{x-1}{y-1}\right)_{\max}=\dfrac{1}{m_{AT_1}}=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$.



Problema 1. Fie x,y numere reale astfel încât $x^2-xy-y^2=1$. Determinaţi minimul şi maximul fracţiei $\dfrac{y-2}{x}$.

Radu Miron

Soluţie. Vom folosi metoda din prima soluţie. Nu putem avea $x=0$ (s-ar obţine $y^2=-1$, imposibil). Fie $t=\dfrac{y-2}{x}$; atunci $y=tx+2$ şi condiţia din ipoteză devine $x^2(t^2+t-1)+2x(2t+1)+5=0$. Cum $x\in\mathbb{R}$, impunem ca $\Delta_x\geq 0$ pentru $t^2+t-1\neq 0$ sau ca $t^2+t-1=0$. Obţinem $t\in[-3,2]\setminus\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$, respectiv $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ adică, în final, $t\in[-3,2]$. Astfel, $\left(\dfrac{y-2}{x}\right)_{\max}=2$, maxim atins pentru $x=-1$, $y=0$ (care verifică $x^2-xy-y^2=1$), iar $\left(\dfrac{y-2}{x}\right)_{\min}=-3$, minim atins pentru $x=1$, $y=-1$ (care verifică $x^2-xy-y^2=1$).

Problema 2 (24739 din *GM–9/2002*)**.** Aflaţi valorile extreme ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin x-3}{\cos x+2}$.

Paul Georgescu, Gabriel Popa

Soluţie. Dacă $A(-2,3)$, $M(\cos x,\sin x)$ sunt puncte în planul xOy, atunci $f(x)$ este chiar panta dreptei AM. Pentru $x\in\mathbb{R}$, punctul M parcurge cercul trigonometric şi, cum $A\in Ext\,\mathcal{C}(O,1)$, rezultă că valorile extreme ale funcţei f sunt atinse atunci când AM este una dintre tangentele duse din A la $\mathcal{C}$.

Dreapta prin $A: y-3=m(x+2)$ este tangentă la $\mathcal{C}$ dacă distanţa de la origine la această dreaptă este 1. Obţinem ecuaţia $\dfrac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=1$, cu soluţiile $m_{1,2}=-2\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

În concluzie, $f_{\min}=-2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ şi $f_{\max}=-2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.