Proprietăţi caracteristice ale triunghiului echilateral

Florina TOMA[1]

Abstract. It is well-known that in a equilateral triangle the point O, H, G, I do coincide. One obtains several characterizations of the equilateral triangle as converse properties of this sentence.
Keywords: circumcenter, orthocenter, centroid, incenter.

MSC 2000: 51M04.

Scopul notei de faţă este găsirea unor proprietăţi caracteristice triunghiului echilateral. Se ştie că într-un triunghi ABC echilateral punctele importante: O, G, H, I, Γ (Gergonne), N (Nagel), K (Lemoine) etc. coincid. Ca urmare coincid şi triunghiurile pedale corespunzătoare (adică triunghiurile determinate de picioarele cevienelor concurente în fiecare dintre aceste puncte importante în parte). În notarea acestora vom folosi indici; astfel, punctului H (ortocentru) îi corespunde $\Delta A_H B_H C_H$ (triunghiul ortic) având punctele importante, cu semnificaţii evidente, O_H, G_H, H_H, I_H etc. Reciproc, *dacă două puncte importante, luate din $\triangle ABC$ sau din diferite triunghiuri pedale, coincid, putem afirma că $\triangle ABC$ este echilateral?* Din mulţimea cazurilor ce apar în această formulare generală a problemei, avem în vedere doar pe acelea în care un punct $X \in \{O, G, H, I\}$ coincide cu unul dintre punctele importate ale $\triangle A_I B_I C_I$, $\triangle A_H B_H C_H$, $\triangle A_G B_G C_G$ sau $\triangle A_O B_O C_O$. Chiar şi aşa, teoretic găsim $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ cazuri posibile, motiv pentru care vom rezolva numai o parte dintre ele. Vom avea în vedere numai triunghiuri ascuţitunghice.

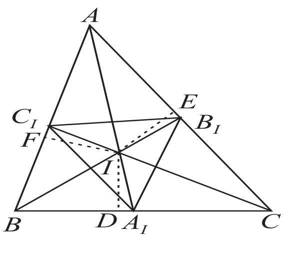
Mai întâi, enunţăm fără demonstraţie un rezultat simplu şi util:

Lemă. *Fie punctele $M \in (BC)$, $N \in (CA)$ şi $P \in (AB)$. Dacă $\triangle MNP$ este echilateral şi $\triangle ANP$, $\triangle BPM$, $\triangle CMN$ sunt isoscele, cu vârfurile A, B şi C, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

1. *Cazul I şi $\triangle A_I B_I C_I$.* Vom vedea că $\triangle ABC$ este echilateral, dacă I coincide cu unul dintre punctele O_I, I_I, G_I, H_I.

Propoziţia 1.1. *Dacă $I \equiv O_I$, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Demonstraţie. Fie $D = pr_{BC} I$, $E = pr_{CA} I$ şi $F = pr_{AB} I$. Avem: $\triangle IDA_I \equiv \triangle IEB_I \equiv \triangle IFC_I$(IC). Deci $\widehat{IA_I D} \equiv \widehat{IB_I E} \equiv \widehat{IC_I F}$, relaţie care revine la $\widehat{C} + \dfrac{\widehat{A}}{2} \equiv \widehat{C} + \dfrac{\widehat{B}}{2} \equiv \widehat{A} + \dfrac{\widehat{C}}{2}$. Rezultă că $\widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C}$, adică $\triangle ABC$ este echilateral.



Propoziţia 1.2. *Dacă $I \equiv I_I$, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

[1] Elevă, cl. a X-a, Colegiul "Naţional", Iaşi

Demonstraţie. AA_I este bisectoare pentru $\widehat{A}$ şi $\widehat{B_IA_IC_I}$. Ca urmare, $\triangle AA_IC_I \equiv \triangle AA_IB_I$ (ULU) şi avem: $AB_I = AC_I$, adică $\triangle AB_IC_I$ este isoscel, şi $A_IB_I = A_IC_I$. La fel obţinem că $\triangle BC_IA_I$ şi $\triangle CA_IB_I$ sunt isoscele şi $B_IC_I = B_IA_I$, $C_IA_I = C_IB_I$. Conform Lemei, $\triangle ABC$ este echilateral.

Propoziţia 1.3. *Dacă $I \equiv G_I$, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Demonstraţie. I fiind centru de greutate în $\triangle A_IB_IC_I$, rezultă că bisectoarea AA_I trece prin mijlocul laturii B_IC_I; deci $\triangle AB_IC_I$ este isoscel cu vârful în A. Analog, $\triangle BC_IA_I$ este isoscel cu vârful în B şi $\triangle CA_IB_I$ este isoscel cu vârful în C. În acelaşi timp, $AA_I \perp B_IC_I$, $BB_I \perp C_IA_I$ şi $CC_I \perp A_IB_I$, adică în $\triangle A_IB_IC_I$ medianele sunt şi înălţimi; deci, $\triangle A_IB_IC_I$ este echilateral. Conform Lemei, obţinem că $\triangle ABC$ este echilateral.

Propoziţia 1.4. *Dacă $I \equiv H_I$, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Demonstraţie. Avem $AI \perp B_IC_I$ şi AI bisectoare în $\triangle AB_IC_I$. Acest triunghi va fi isoscel de vârf A. Afirmaţii analoage relativ la $\triangle BC_IA_I$ şi $\triangle CA_IB_I$. Din cele deja văzute, AA_I, BB_I, CC_I sunt mediane în $\triangle A_IB_IC_I$. Cum, din ipoteză, ele sunt şi înălţimi, rezultă că $\triangle A_IB_IC_I$ este echilateral. Utilizând Lema, deducem că $\triangle ABC$ este echilateral.

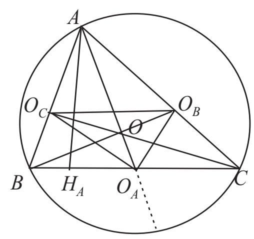
2. *Cazul G şi $\triangle A_GB_GC_G$ (triunghiul median).* Observăm că punctul G este centru de greutate atât pentru $\triangle ABC$ cât şi pentru $\triangle A_GB_GC_G$, adică $G \equiv G_G$. Altfel spus, coincidenţă $G \equiv G_G$ nu impune triunghiului dat vreo restricţie. Dar coincidenţele $G \equiv O_G$, $G \equiv H_G$, $G \equiv I_G$ revin la $G_G \equiv O_G$, $G_G \equiv H_G$, $G_G \equiv I_G$; ca urmare, triunghiul median va fi echilateral dacă una dintre aceste ultime relaţii are loc. În final $\triangle ABC$, care este asemenea cu cel median, va fi echilateral dacă are loc una dintre coincidenţele $G \equiv O_G$ (O_G este centrul cercului lui Euler), $G = H_G$, $G \equiv I_G$.

3. *Cazul H şi $\triangle A_HB_HC_H$ (triunghiul ortic).* Observăm acum că ortocentrul H este centrul cercului înscris (punctul I_H) al $\triangle A_HB_HC_H$, adică $H \equiv I_H$. Ca şi în cazul precedent, coincidenţa $H \equiv I_H$ nu impune triunghiului ABC nicio restricţie, dar oricare dintre condiţiile: $H \equiv O_H$ (O_H este centrul cercului lui Euler), $H \equiv G_H$, $H \equiv H_H$ conduce la faptul că $\triangle ABC$ este echilateral (se utilizează Lema!).

4. *Cazul O şi $\triangle A_OB_OC_O$.* Vom utiliza mai jos faptul că înălţimea din A şi diametrul prin A fac unghiuri egale cu laturile AB şi respectiv AC.

Propoziţia 4.1. *Dacă $O \equiv O_O$, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.*

Demonstraţie. Avem $\triangle OAO_B \equiv \triangle OBO_A$ (LUL). Ca urmare, $\widehat{OAO_B} \equiv \widehat{OBO_A}$. Dar $m(\widehat{OAO_B}) = m(\widehat{BAH_A}) = \frac{\pi}{2} - B$ (s-a considerat, ca în figură, $m(\widehat{B}) \geq m(\widehat{C})$. Deci, $m(\widehat{OBO_A}) = \frac{\pi}{2} - B$. Dar, în triunghiul OBC avem $m(\widehat{BOC}) = 2m(\widehat{A})$ şi, ca urmare, $m(\widehat{OBO_A}) = \frac{\pi}{2} - A$. Va rezulta că $A = B$ şi în final $\triangle ABC$ va fi echilateral.



Propoziţia 4.2. *Dacă* $O \equiv H_O$*, atunci* $\triangle ABC$ *este echilateral.*

Demonstraţie. Rezultă că $AO \perp B_OC_O$. Aşadar, $m(\widehat{AB_OC_O}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{OAB_O}) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - B\right) = B$, adică B_OC_O este antiparalelă cu BC şi $m(\widehat{OBO_A}) = m(\widehat{OAO_B}) = \frac{\pi}{2} - B$ (patrulaterul ABO_AO_B este inscriptibil). Se continuă ca în propoziţia precedentă şi se deduce că $\triangle ABC$ este echilateral.

Propoziţia 4.3. *Dacă* $O \equiv G_O$*, atunci* $\triangle ABC$ *este echilateral.*

Demonstraţie. Cu teorema sinusurilor, aplicată în $\triangle ABA_O$ şi $\triangle ACA_O$ obţinem: $\frac{A_OB}{A_OC} = \frac{c\sin[A - (\frac{\pi}{2} - C)]}{b\sin(\frac{\pi}{2} - B)} = \frac{c\cos C}{b\cos B} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$; analog, $\frac{B_OC}{B_OA} = \frac{\sin 2A}{\sin 2C}$ şi $\frac{C_OA}{C_OB} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$. De aici, obţinem relaţiile: $B_OA = \frac{b\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2C}$, $C_OA = \frac{c\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B}$.

Acum, să observăm că, în conformitate cu ipoteza, AO trece prin mijlocul M al segmentului B_OC_O. Cu teorema sinusurilor, relativ la $\triangle AMB_O$ şi $\triangle AMC_O$, vom obţine: $1 = \frac{MB_O}{MC_O} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - B)AB_O}{\sin[A - (\frac{\pi}{2} - B)]AC_O} = \frac{\cos B \cdot AB_O}{\cos C \cdot AC_O}$. Deci, $\cos B \cdot AB_O = \cos C \cdot AC_O$ şi, ţinând seama de expresiile găsite pentru AB_O şi AC_O, $\frac{b\cos B\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2C} = \frac{c\cos C\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B}$. Numărătorii fiind egali, obţinem $\sin 2C = \sin 2B$ şi apoi $B = C$. La fel obţinem $C = A$, ceea ce încheie demonstraţia.

Observaţii. 1) În cazul $O \equiv I_O$ calculele se complică şi mai mult; propunem cititorilor să se ocupe de această situaţie.

2) Dacă vom ,,încrucişa" cazurile – să cerem coincidenţa unor puncte importante din triunghiuri pedale diferite (de exemplu, $I_G = H_O$ etc.) – vor apărea dificultăţi mari, imposibil de abordat cu mijloace elementare.

Bibliografie

1. **C. Cocea** – *200 de probleme din geometria triunghiului echilateral*, Editura ,,Gh. Asachi" Iaşi, 1992.
2. **V. Nicula** – *Geometrie plană* (*sintetică, vectorială, analitică*). *Culegere de probleme*, Editura Gil, Zalău, 2002.
3. **Gh. Ţiţeica** – *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1961.