O problemă de numărare

Răzvan CEUCĂ[1]

Abstract. Problem C.O:5077 of *Gazeta Matematică*, No. 12/2009 has required to count up the trapezia whose vertices lie among the vertices of a regular polygon with 2010 sides. This problem is generalized to the case of a regular polygon with n sides.

Keywords: regular polygon, trapezium.

MSC 2000: 05A05, 97B99.

În Gazeta Matematică 12/2009, apare problema

C.O.: 5077. *Se consideră poligonul regulat cu 2010 laturi* $A_1A_2\dots A_{2010}$. *Câte trapeze* $A_iA_jA_kA_l$ *au vârfurile printre cele ale poligonului?*

Gabriel Popa şi **Paul Georgescu**

În nota de faţă, ne propunem să rezolvăm această problemă în cazul general, considerând $A_1A_2\dots A_n$ poligon regulat cu n laturi.

Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris poligonului. Orice trapez $A_iA_jA_kA_l$, fiind înscris în cercul $\mathcal{C}$, este isoscel şi deci admite o axă de simetrie. Deosebim situaţiile:

I. ***n* impar.** În acest caz, axa de simetrie a unui trapez dintre cele căutate este diametru în $\mathcal{C}$, care conţine un vârf al poligonului şi este mediatoare a laturii care se opune acestui vârf. Fie $n = 2m + 1$; numărăm întâi trapezele care admit axa de simetrie A_1M_{m+1}, unde M_{m+1} este mijlocul segmentului $A_{m+1}A_{m+2}$. Dacă $A_iA_jA_kA_l$ este un astfel de trapez, cu $2 \le i < j \le m+1$, atunci perechea (i, j) poate fi aleasă în $C_m^2 = \dfrac{m(m-1)}{2}$ moduri, prin urmare există $\dfrac{m(m-1)}{2}$ asemenea trapeze. Cum axa de simetrie poate fi aleasă în n moduri, numărul trapezelor este, în acest caz, $n \cdot \dfrac{m(m-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)(n-3)}{8}$.

II. ***n* par.** Atunci, un trapez dintre cele considerate admite drept axă de simetrie: 1) fie un diametru A_pA_{p+m}, $p \in \{1, 2, \dots, m\}$, unde $n = 2m$; 2) fie o mediatoare M_pM_{p+m}, comună perechii de laturi paralele A_pA_{p+1} şi $A_{p+m}A_{p+m+1}$, cu $p \in \{1, 2, \dots, m\}$, unde $A_{2m+1} = A_1$. Apar însă două dificultăţi suplimentare: contează dacă numărul punctelor rămase de-o parte a axei de simetrie este par sau impar, iar o parte dintre perechile de puncte care se formează nu furnizează trapeze, ci dreptunghiuri. În aceste condiţii, deosebim situaţiile:

II$_1$. $\boldsymbol{n = 4q}$. Fie $A_iA_jA_kA_l$ un trapez cu axa de simetrie A_1A_{2q+1}, unde $2 \le i < j \le 2q$. Perechea (i, j) poate fi aleasă în $C_{2q-1}^2 = \dfrac{(2q-1)(2q-2)}{2} = (2q-1)(q-1)$ moduri. Dintre acestea furnizează dreptunghiuri $q - 1$ perechi, anume cele de forma $(i, 2q + 2 - i)$, $i \in \{2, 3, \dots, q\}$. Găsim astfel $(2q - 1)(q - 1) - (q - 1) = 2(q - 1)^2$ trapeze cu axa de simetrie A_1A_{2q+1}. Cum axele de simetrie de tipul 1) sunt în număr de $2q$, avem $4q(q - 1)^2$ trapeze de acest tip.

[1]Elev, Colegiul Naţional Iaşi

Fie acum $A_iA_jA_kA_l$ un trapez cu axa de simetrie M_1M_{2q+1}, unde $2 \leq i < j \leq 2q+1$. Perechea (i,j) poate fi aleasă în $C_{2q}^2 = q(2q-1)$ moduri. Dintre acestea, furnizează dreptunghiuri q perechi, anume cele de forma $(i, 2q+3-i)$, unde $i \in \{2, 3, \ldots, 2q+1\}$. Găsim astfel $q(2q-1) - q = 2q(q-1)$ trapeze cu axa de simetrie M_1M_{2q+1}. Cum axele de simetrie de tipul 2) sunt în număr de $2q$, obţinem $4q^2(q-1)$ trapeze de acest tip.

Numărul total al trapezelor este, în acest caz, $4q(q-1)^2 + 4q^2(q-1) = 4q(q-1)\cdot$ $\cdot(2q-1) = \dfrac{n(n-2)(n-4)}{8}$.

II_2. $\boldsymbol{n = 4q+2}$. Cu o analiză asemănătoare, găsim $2q(q-1)(2q+1)$ trapeze cu axa de simetrie de tipul 1) şi încă $2q^2(2q+1)$ trazepe cu axa de simetrie de tipul 2). În total, vom avea $2q(q-1)(2q+1) + 2q^2(2q+1) = 2q(2q+1)(2q-1) = \dfrac{n(n-2)(n-4)}{8}$ trazepe, deci acelaşi rezultat ca în subcazul II_1.

În concluzie, *numărul trapezelor $A_iA_jA_kA_l$ cu vârfurile printre cele ale poligonului este $\dfrac{n(n-1)(n-3)}{8}$, dacă n impar, respectiv $\dfrac{n(n-2)(n-4)}{8}$, dacă n par.*

Recreaţii ... matematice

1. Răspuns la "*recreaţia*" **1** de la pag. 32:

$$\begin{aligned} 6\cdot 4 : 1 - 3 &= 21\\ 6\cdot 4 - (3-1) &= 22\\ 4\cdot(6-1)+3 &= 23\\ 6:(1-3:4) &= 24\\ 3\cdot(1+6)+4 &= 25. \end{aligned}$$

2. Răspuns la "*recreaţia*" **2** de la pag. 32:

$$\begin{aligned} 1+(1+1+1)! &= 7\\ (2\cdot 2)!! - 2:2 &= 7\\ 3+3+3:3 &= 7\\ 4+4:4+\sqrt{4} &= 7\\ 5+(5+5):5 &= 7\\ 6:6+\sqrt{6\cdot 6} &= 7\\ 7+(7-7)\cdot 7 &= 7\\ \sqrt{8\cdot 8} - 8:8 &= 7\\ 9:9+\sqrt{9}+\sqrt{9} &= 7 \end{aligned}$$

(se convine că $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ şi $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n$).