NOTA ELEVULUI

Estimări de sume

Tudor PĂDURARIU[1]

În ultimii ani, la diverse concursuri, naţionale sau internaţionale, au fost propuse probleme în care se cere să se găsească sau să se demonstreze o anumită aproximare pentru o sumă (numerică, vectorială etc). Metodele de rezolvare a unor asemenea probleme sunt variate şi presupun raţionamente care folosesc reducerea la absurd, principiul cutiei, principiul extremal, inducţia matematică ş. a.

Prezentăm în continuare câteva exemple; cititorul interesat poate exersa tehnicile dobândite rezolvând problemele propuse în finalul notei, precum şi selecţia de probleme din articolul lui **Gabriel Carroll** - *Estimating Sums*, care poate fi găsit pe internet la adresa [**1**] şi care a constituit punctul de plecare al demersului nostru.

Problema 1. *Fie $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ numere reale cu proprietatea că $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$. Demonstraţi că pentru orice $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, există întregii $e_1,\ e_2,\dots,\ e_n$, nu toţi nuli, cu $|e_i|<k-1$, $\forall i=\overline{1,k}$, pentru care $|e_1x_1+\cdots+e_nx_n|\leq\dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$. (I.M.O., 1987)*

Soluţie. Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz, obţinem că $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\geq\sqrt{n(x_1^2+\cdots+x_n^2)}=\sqrt{n}$. În total există k^n sume de tipul $e_1x_1+\cdots+e_nx_n$, cu $0\leq x_i\leq k-1$, iar toate aceste sume se află în interiorul unui interval de lungime $(k-1)\sqrt{n}$. Aceste interval poate fi acoperit cu k^n-1 subintervale de lungime $\dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$ (concluzia problemei sugerează acest lucru!). Din principiul cutiei, există două sume care se găsesc în acelaşi subinterval, iar diferenţa lor satisface cerinţele.

Problema 2. *Fie $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ numere reale cu $|x_i|\leq\dfrac{n+1}{2}$, $\forall i=\overline{1,n}$, iar $|x_1+x_2+\cdots+x_n|=1$. Demonstraţi că există o permutare $y_1,\ y_2,\dots,\ y_n$ a numerelor $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ astfel încât $|y_1+2y_2+\cdots+ny_n|\leq\dfrac{n+1}{2}$. (I.M.O., 1997)*

Soluţie. Presupunem prin absurd că pentru orice permutare $y_1,\ y_2,\dots,\ y_n$ a numerelor $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ am avea $|y_1+2y_2+\cdots+ny_n|>\dfrac{n+1}{2}$. Observăm că $|(x_1+\cdots+nx_n)+(x_n+2x_{n-1}+\cdots+nx_1)|=(n+1)\,|x_1+x_2+\cdots+x_n|=n+1$ şi, dacă numerele $S_1=x_1+2x_2+\cdots+nx_n$ şi $S_2=x_n+2x_{n-1}+\cdots+nx_1$ ar avea acelaşi semn, modulul sumei ar fi egal cu suma modulelor, contradicţie. Rămâne că S_1 şi S_2 au semne contrare; să zicem că $S_1>0$, $S_2<0$.

Putem realiza trecerea de la S_1 la S_2 schimbând în mod repetat între ele câte două numere consecutive x_k şi x_{k+1}. La un anumit pas, de exemplu când trecem de la suma $S_3=z_1+\cdots+jz_j+(j+1)\,z_{j+1}+\cdots+nz_n$ la suma $S_4=z_1+\cdots+jz_{j+1}+(j+1)\,z_j+\cdots+nz_n$, semnul sumei S se va schimba: $S_3>0$, iar $S_4<0$. Cum $|S_3|>\dfrac{n+1}{2}$, $|S_4|>\dfrac{n+1}{2}$, vom avea că $S_3>\dfrac{n+1}{2}$, iar $S_4<-\dfrac{n+1}{2}$, deci $S_3-S_4>n+1$. Pe de altă parte, $S_3-S_4=j\,(z_j-z_{j+1})+(j+1)\,(z_{j+1}-z_j)=$

[1] Elev, Colegiul Naţional "Gr. Moisil", Oneşti

$z_{j+1} - z_j$ şi $S_3 - S_4 = |S_3 - S_4| = |z_{j+1} - z_j| \leq |z_{j+1}| + |z_j| \leq 2 \cdot \dfrac{n+1}{2} = n+1$. Contradicţia la care am ajuns arată că presupunerea iniţială este falsă.

Problema 3. *Fie $n \geq 2$ un număr întreg. Colorăm fiecare dintre $\dfrac{n^3+5n}{6}$ numere întregi consecutive în roşu sau albastru. Demonstraţi că există o submulţime monocoloră $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ astfel încât $1 \leq a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \cdots \leq a_n - a_{n-1}$. (Concursul "Al. Myller", 2007)*

Soluţie. Putem considera că numerele sunt 1, 2,..., $\dfrac{n^3+5n}{6}$, culorile sunt A şi R şi fie $d_n = \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$. Vom demonstra prin inducţie că pentru orice $n \geq 2$, există submulţimea monocoloră $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pentru care $1 \leq a_2 - a_1 \leq \cdots \leq a_n - a_{n-1} \leq d_n$. Proprietatea este imediată pentru $n = 2$; o presupunem adevărată pentru n şi să o verificăm pentru $n+1$. Conform ipotezei inductive, printre primele $\dfrac{n^3+5n}{6}$ numere există submulţimea monocoloră $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, colorată cu A, astfel încât $1 \leq a_2 - a_1 \leq \cdots \leq a_n - a_{n-1} \leq d_n$. Considerăm numerele $a_n + d_n$, $a_n + d_n + 1$,..., $a_n + d_n + n$, în număr de $n+1$. Dacă toate au culoarea R, proprietatea este verificată pentru $n+1$. Dacă unul dintre ele, fie acesta a_{n+1}, are culoarea A, atunci $a_{n+1} - a_n \leq d_n + n = d_{n+1}$, iar $a_{n+1} \leq \dfrac{n^3+5n}{6} + d_n + n = \dfrac{(n+1)^3 + 5(n+1)}{6}$, deci mulţimea $\{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ îndeplineşte condiţia dorită.

Problema 4. *Fiind date n numere reale, demonstraţi că există cel mult $\dfrac{n^2}{4}$ perechi (a_i, a_j) cu proprietatea că $1 < |a_i - a_j| < 2$.*

Soluţie. Cerinţa problemei sugerează metoda de rezolvare: un graf cu n vârfuri, ale cărui muchii nu formează triunghiuri, are cel mult $\dfrac{n^2}{4}$ muchii (rezultatul lui Mantel, caz particular al teoremei lui Turan). Construim un graf astfel: vârfurile sunt numerele date, iar două vârfuri a_i, a_j se unesc printr-o muchie când $1 < |a_i - a_j| < 2$. Dacă, prin absurd, ar exista trei vârfuri unite prin muchii, am avea simultan $1 < |a_i - a_j| < 2$, $1 < |a_j - a_k| < 2$ şi $1 < |a_i - a_k| < 2$. Putem presupune că $a_i > a_j > a_k$ şi relaţiile precedente devin $1 + a_j < a_i < 2 + a_j$ şi $1 + a_k < a_i < 1 + a_k$, de unde $1 + a_j < 2 + a_k$, adică $a_j - a_k < 1$, imposibil. Astfel, am demonstrat că graful nu are triunghiuri şi aplicarea rezultatului menţionat iniţial încheie rezolvarea.

Încheiem prin a propune spre rezolvare celor interesaţi câteva probleme:

Problema 5. *Fie O un punct pe o dreaptă d, iar $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_n}$ versori cu extremităţile într-un acelaşi semiplan determinat de d. Dacă n este impar, să se arate că $\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geq 1$ (I.M.O., 1973).*

Problema 6. *Într-o secvenţă de numere reale, suma oricăror 7 termeni consecutivi este negativă, iar suma oricăror 11 termeni consecutivi este pozitivă. Să se determine numărul maxim de termeni ai unei asemenea secvenţe. (I.M.O., 1977)*

Bibliografie

1. http://web.mit.edu/rwbarton/public/mop

2. http://www.mathlinks.ro