# O propoziţie echivalentă cu conjectura lui Goldbach

***Bogdan CIACOI***[1]

Punctul de plecare al acestei Note este celebra şi aparent simpla conjectură a lui Goldbach. Această problemă, care a impulsionat considerabil dezvoltarea teoriei numerelor, se află pe lista problemelor de matematică nerezolvate încă. Ea îşi are originea în corespondenţa dintre Christian Goldbach şi Leonhard Euler – anul 1742 – şi se formulează astfel:

$(CG)$ *Orice număr natural par, mai mare ca* 2*, este suma a două numere prime.*

O formă mai tare a acesteia este:

$(CG')$ *Orice număr natural par, mai mare ca* 6*, este suma a două numere prime diferite.*

După cum se poate vedea în [**2**], $(CG')$ este echivalentă cu afirmaţia următoare:

*Orice număr natural mai mare ca* 17 *este suma a trei numere prime diferite.*

Să notăm cu $P_{[n]}$ mulţimea tuturor perechilor de numere prime egal depărtate de $n$ şi cu $P'_{[n]}$ mulţimea tuturor perechilor de numere prime diferite şi egal depărtate de $n$. Exemple:

| | |
|---|---|
| $P_{[2]} = \{(2,2)\}$, | $P'_{[2]} = \emptyset$, |
| $P_{[3]} = \{(3,3)\}$, | $P'_{[3]} = \emptyset$, |
| $P_{[4]} = \{(3,5)\}$, | $P'_{[4]} = \{(3,5)\}$, |
| $P_{[5]} = \{(3,7)\}$, | $P'_{[5]} = \{(3,7)\}$, |
| $P_{[6]} = \{(5,7)\}$, | $P'_{[6]} = \{(5,7)\}$, |
| $P_{[7]} = \{(3,11),(7,7)\}$, | $P'_{[7]} = \{(3,11)\}$, |
| $P_{[8]} = \{(3,13),(5,11)\}$, | $P'_{[8]} = \{(3,13),(5,11)\}$, |
| $P_{[9]} = \{(5,13),(7,11)\}$, | $P'_{[9]} = \{(5,13),(7,11)\}$, |
| $P_{[10]} = \{(3,17),(7,13)\}$, | $P'_{[9]} = \{(5,13),(7,11)\}$, |
| $P_{[11]} = \{(3,19),(5,17),(11,11)\}$ etc. | $P'_{[11]} = \{(3,19),(5,17)\}$ etc. |

Evident, au loc: $P'_{[n]} \subset P_{[n]}$, $n \geq 2$ si $P'_{[n]} = P_{[n]}$ dacă $n$ nu este număr prim.

**Observaţii. 1.** Postulatul lui Bertrand (pentru orice $n \geq 2$ există cel puţin un număr prim între $n$ şi $2n$) dă o şansă existenţei unei perechi de numere prime echidistante faţă de $n$, dar nu o garantează.

**2.** Dacă $n \geq 3$, atunci, din considerente de paritate, se constată că numărul prim 2 nu poate intra în perechile din $P_{[n]}$ şi $P'_{[n]}$.

**3.** Din modul cum au fost introduse mulţimile $P_{[n]}$ şi $P'_{[n]}$ rezultă că avem:

$(i)$ $(p,q) \in P_{[n]}, n \geq 2 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\ldots,n-2\}$ astfel încât numerele $p = n-k$ şi $q = n+k$ sunt prime.

$(ii)$ $(p,q) \in P'_{[n]}, n \geq 4 \Leftrightarrow \exists k \in \{1,2,\ldots,n-3\}$ astfel încât numerele $p = n-k$ şi $q = n+k$ sunt prime.

[1] Elev, cl. a XII-a, Liceul Teoretic "Ana Ipătescu", Gherla

**4.** Dacă fixăm $n+k$ ca şi număr prim între $n$ şi $2n$, se poate arăta uşor prin calcul că $n-k$ este de forma $6m \pm 1$, forma necesară a unui număr prim; bineînţeles aceasta nu garantează că $n-k$ este prim.

Formulăm următoarele două conjecturi:

$(CCE)$ *Pentru orice număr natural* $n \geq 2$ *există cel puţin o pereche de numere prime egal depărtate de el.*

$(CCE')$ *Pentru orice număr natural* $n \geq 4$ *există cel puţin o pereche de numere prime diferite şi egal depărtate de el.*

Aceste pregătiri permit să enunţăm următoarea

**Propoziţie.** *Sunt adevărate următoarele afirmaţii:*
*a)* $(CCE)$ *este echivalentă cu* $(CG)$;
*b)* $(CCE')$ *este echivalentă cu* $(CG')$.

**Demonstraţie.** Întrucât *a)* şi *b)* se dovedesc în mod similar, vom demonstra numai punctul *b)*.

$\underline{(CCE') \Rightarrow (CG')}$ Fie $n$ par şi mai mare ca 6. Atunci $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{2} \geq 4$ şi, conform ipotezei, $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n-3\}$ astfel încât $\frac{n}{2} - k$ şi $\frac{n}{2} + k$ sunt prime. Atunci, $n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = (\frac{n}{2} - k) + (\frac{n}{2} + k)$, adică $n$ este suma a două numere prime distincte.

$\underline{(CG') \Rightarrow (CCE')}$ Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Atunci $2n$ este mai mare ca 6, şi $(CG')$ fiind presupusă adevarată, există două numere prime distincte $p$ şi $q$ astfel încât $2n = p + q$. Dacă $p < q$ (analog procedăm în cazul $q < p$), din egalitatea precedentă rezultă că $n - p = q - n \in \mathbb{N}^*$; notăm $k = n - p = q - n$ şi constatăm că avem $k \in \{1, 2, \ldots, n-3\}$. Cum $(p, q) \equiv (n-k, n+k)$ este o pereche de numere prime echidistante de $n$, implicaţia este dovedită.

Este posibil ca această formă echivalentă cu conjectura lui Goldbach să prezinte un anumit interes şi în privinţa distribuţiei numerelor prime.

**Bibliografie**

1. **I. Creangă, C. Cazacu, P. Minuţ, Gh. Opaiţ, C. Reicher** - *Introducere în teoria numerelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.
2. **P. Minuţ** - *Asupra ipotezei lui Goldbach*, Recreaţii Matematice, 4(2002), nr.1, 5-6.
3. **W. Sierpiński** - *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

---

## Recreaţii ... matematice

**Soluţie** (procedeul găsirii numărului ales - v. pag. 15). Scad 6 din numărul ce mi l-aţi comunicat şi obţin tocmai numărul ales. Justificarea este dată de egalitatea

$$(a \cdot 5 + 3)\, 2 + b = \overline{ab} + 6.$$

**Observaţie.** Dar dacă numărul ales ar avea trei cifre? Am proceda similar, pe baza egalităţii

$$(a \cdot 5 + 3)\, 20 + (b \cdot 5 + 3)\, 2 + c = \overline{abc} + 66.$$