Asupra criteriului de congruenţă LLU

Marius TIBA[1]

Aşa cum se arată în [**1**], următorul criteriu de congruenţă a triunghiurilor întinde numeroase capcane prin aplicarea sa incorectă. Redăm aici rezultatul din care decurge acest criteriu.

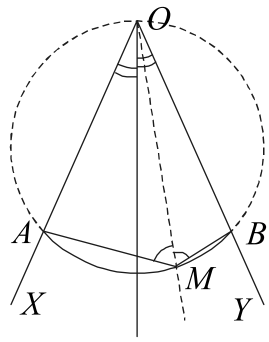
Propoziţie. *Dacă două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele ale altui triunghi, iar* $\widehat{\alpha}$ *şi* $\widehat{\beta}$ *notează unghiurile opuse celorlalte laturi congruente,*

a) atunci $\widehat{\alpha}$ *şi* $\widehat{\beta}$ *sunt sau congruiente sau suplementare;*

b) (Criteriu LLU) dacă în plus $\widehat{\alpha}$ *şi* $\widehat{\beta}$ *sunt de acelaşi tip (adică ambele sunt ascuţite, obtuze sau drepte), atunci cele două triunghiuri sunt congruente.*

Problema 1. *Pe laturile* $(OX$ *şi* $(OY$ *ale unui unghi ascuţit* $\widehat{XOY}$ *se iau punctele* A *şi* B *astfel încât* $[OA] \equiv [OB]$. *În interiorul unghiului se ia un punct* M *supus condiţiei* $\widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB}$. *Găsiţi locul geometric descris de* M.

Rezolvare. Vom arăta că locul căutat este format din bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{XOY}$ şi arcul cercului circumscris $\triangle AOB$ cuprins în interiorul unghiului, pe care-l notăm $\overset{\frown}{AB}$. Fie M un punct ce satisface condiţiile din enunţ. Ca urmare $\triangle OAM$ şi $\triangle OBM$ au unghiurile $\widehat{OAM}$ şi $\widehat{OBM}$ sau congruente sau suplimentare (conform punctului a) al Propoziţiei). În cazul în care $\widehat{OAM} \equiv \widehat{OBM}$, punctul M se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{O}$. Dacă aceste unghiuri sunt suplimentare, atunci patrulaterul $OAMB$ este inscriptibil şi, ca urmare, $M \in \overset{\frown}{AB}$. Reciproca rezultă imediat.



Menţionăm că la faza judeţeană a O. M. din Vaslui, 2005, cl. a VI-a, s-a cerut să se arate că locul geometric este doar bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{XOY}$. Nerespectarea Propoziţiei conduce la erori ca aceasta (prezentă şi în barem) sau cea din problema T12, [**2**, pag. 10].

Problema 1 ne sugerează

Problema 2. *Găsiţi locul geometric al punctelor* M *pentru care* $\widehat{OAM} \equiv \widehat{OBM}$, *unde notaţiile sunt aceleaşi ca în Problema 1.*

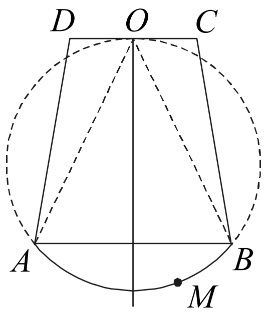
Rezolvare. Judecând analog ca la Problema 1, obţinem locul căutat format din bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{XOY}$ şi segmentul $[AB]$ (fără capete).

Ca o extindere a Problemei 1, dăm următoarea

Problema 3. *Fie* $ABCD$ *un trapez isoscel şi fie* O *mijlocul bazei mici* $[CD]$. *Găsiţi locul geometric al punctelor* M *situate în interiorul liniei frânte formate din semidreptele* $(DA$, $(CB$ *şi segmentul* $[CD]$, *astfel încât* $\widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB}$.

[1] Elev, cl. a VII-a, Colegiul Naţional "C. Negruzzi", Iaşi

Rezolvare. Această problemă se reduce la Problema 1, deoarece $[OA] \equiv [OB]$ ($\triangle OBC \equiv \triangle OAD$ (LUL)). Astfel, locul geometric cerut este format din punctele mediatoarei segmentului CD şi ale arcului cercului circumscris $\triangle OAB$, aflate în interiorul liniei frânte date.



Problema 3 ne sugerează următoarele două probleme, pe care le propunem cititorului spre rezolvare:

Problema 4. *Se modifică Problema 3 luând punctul O la intersecţia laturilor neparalele ale trapezului.*

Problema 5. *Modificăm Problema 3, luând condiţia* $\widehat{AMD} \equiv \widehat{BMC}$.

Bibliografie

1. D. Miheţ - *Criteriul de congruenţă LLU*, RMT an II (seria a 4-a), nr. 2, 1997, pag. 3-7.
2. I. Pătraşcu - *Probleme de geometrie plană*, Editura Cardinal, Craiova, 1996.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **tbirsan@math.tuiasi.ro**, **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.
- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.
- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**
- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).