Acoperiri ale planului laticial cu figuri

Marius PACHIŢARIU[1]

Există numeroase probleme de concurs care implică acoperiri ale unor figuri laticiale, de exemplu dreptunghiuri, cu un număr de copii ale unei alte figuri date (dominouri, trominouri) sau cu alte copii scalate ale însuşi dreptunghiului.

Observând metodele si tehnicile acestor tipuri de probleme, putem analiza şi acoperiri ale întregului plan cu diferite figuri. Vom lucra în continuare doar în planul laticial. Pentru aceasta, să definim planul laticial şi să dăm coordonate pătrăţelelor care îl alcătuiesc. Introducem în continuare o serie de noţiuni.

Considerăm dreptele de ecuaţie $x = r$, $r \in \mathbb{Z}$, $y = q$, $q \in \mathbb{Z}$. Pătratele de latură 1 determinate de punctele lor de intersecţie vor constitui elementele *planului laticial*. Vom atribui coordonate acestor pătrate în următorul mod: dacă un pătrat se află la intersecţia benzilor determinate de $x = r$, $x = r + 1$ şi respectiv, $y = q$, $y = q + 1$, atunci vom spune că pătratul are coordonate r, q sau mai simplu vom numi pătratul $[r, q]$. Vom numi *vector* între două pătrate vectorul $a\overline{i} + b\overline{j}$, cu $\overline{i}$, $\overline{j}$ versorii axelor şi a, b numărul de pătrăţele orizontale, respectiv verticale care separă cele două pătrate considerate, cu semnul asociat corespunzător.

Numim *plantaţie* orice colecţie de pătrate ale planului laticial, conexă în sensul că din orice pătrat putem ajunge în oricare altul printr-o succesiune finită de deplasări unitare (translaţii după una din cele 4 direcţii), astfel încât după fiecare pas (translaţie) ne aflăm încă în unul dintre pătratele colecţiei. Numim *figură* mulţimea maximală de plantaţii cu proprietatea că fiecare plantaţie poate fi obţinută din oricare alta a figurii prin translaţii, rotaţii şi simetrii faţă de drepte paralele cu axele. Cu alte cuvinte, figura reprezintă o clasă de echivalenţă.

Fie un set X de figuri. Numim *acoperire* a planului orice set Y de plantaţii cu elemente aparţinând figurilor din X, astfel încât fiecare punct al planului aparţine la cel puţin o plantaţie din Y. Numim *măsura* unei acoperiri $\sup n[i, j]$, unde $n[i, j]$ este numărul de plantaţii cărora îi aparţine patratul $[i, j]$. Numim *n-acoperire* o acoperire în care fiecare pătrat al planului aparţine aceluiaşi număr de plantaţii modulo n. Pentru 2-acoperiri vom considera acoperire impară cea în care fiecare pătrat e acoperit de un număr impar de ori. 2-acoperirile pare nu ne interesează, întrucât considerând acceaşi plantaţie de două ori şi considerând oricâte astfel de perechi, vom obţine întotdeauna o 2-acoperire pară.

Observaţia 1. Reuniunea a două acoperiri este o acoperire şi măsura reuniunii a două acoperiri este cel mult suma măsurilor celor 2 acoperiri.

Putem acum să ne punem o serie de întrebări:

Întrebarea 1. Care sunt seturile X de cardinal 1 pentru care există acoperiri cu măsura 1?

Un exemplu netrivial de figuri în spaţiu cu această proprietate îl oferă următoarea

Problemă. Lipim câte un cub unitate pe fiecare faţă a unui cub unitate. Arătaţi că putem umple spaţiul folosind copii ale solidului rezultat. (Austrian-Polish 2000)

[1] Elev, Colegiul Naţional, Iaşi

Întrebarea 2. Care sunt seturile X de cardinal 2 pentru care există acoperiri cu măsura 1?

Întrebarea 2′. Dati exemple de doua seturi Y şi Z de cardinal 1 pentru care nu exista acoperire cu măsura 1 cu setul Y şi nu există acoperire cu măsura 1 cu setul Z, dar pentru care există acoperire cu măsura 1 cu setul $Y \bigcup Z$.

Vezi la pagina 74 exemplul 1. Demonstraţi că exemplul este într-adevăr bun!

Întrebarea 2″. Daţi exemple de două seturi de figuri de cardinal 1: Y, pentru care nu există acoperire cu măsura 1 şi Z, pentru care există o astfel de acoperire şi pentru care există acoperire cu setul $Y \bigcup Z$ cu măsura 1.

Vezi la pagina 74 exemplul 2. Demonstraţi că exemplul este într-adevăr bun!

Întrebarea 3. Care sunt seturile X de figuri de cardinal n, $n \in \mathbb{N}$, pentru care există acoperiri cu măsura 1?

Întrebarea 3′. Daţi exemple de seturi de n seturi X_i, $i = \overline{1, n}$ de figuri, de cardinale 1, cu proprietatea că nici unul dintre ele nu poate genera o acoperire cu măsura 1, dar reuniunea lor da.

Vezi la pagina 74 exemplul 3. Demonstraţi că exemplul este într-adevăr bun!

Întrebarea 4. Orice figură poate genera o 2-acoperire impară a planului cu măsura finită? Dacă vom considera minimul măsurii peste toate acoperirile posibile, putem găsi un maxim pentru acesta în funcţie de figura folosită?

Nu vom răspunde aici întrebărilor 1, 2, 3, fiind prea generale. Desigur, seturile X care constituie răspunsurile primelor 2 sunt particularizări ale seturilor din a treia întrebare. Caracterizări ale primului tip de seturi din anumite puncte de vedere sunt cu siguranţă posibile, pe când o caracterizare în cazul general pare imposibilă (vezi exemplele întrebărilor $2'$, $2''$, $3'$).

Vom răspunde în schimb ultimei întrebări. Răspunsurile sunt DA şi DA. Acoperirile modulo 2 ne dau într-adevăr de ajunsă libertate. Pentru demonstraţiile următoare vom renunţa la condiţia de conexitate din definiţia plantaţiilor.

Demonstraţia 1. Vom numi cardinal al unei plantaţii (figuri) numărul de pătrăţele pe care le conţine. Pentru o figură de cardinal impar putem lua următoarea acoperire: Fie o plantaţie oarecare şi toate translaţiile ei care se păstrează pe latice. Atunci plantaţiile rezultate şi cu cea iniţială reprezintă o 2-acoperire. Într-adevăr, fiecare pătrat al planului laticial este acoperit de exact (cardinalul plantaţiei)-ori, deci pentru cardinalul impar avem o 2-acoperire. Mai mult, avem măsura acoperirii egală cu cardinalul figurii.

Din păcate această cale nu pare să furnizeze soluţie pentru figurile de cardinal par.

Demonstraţia 2. Figura F fiind finită, o putem include într-un pătrat cu laturile pe latice, deci o putem include într-un pătrat cu latura putere a lui 2. Fie 2^k latura celui mai mic astfel de pătrat. Să considerăm acoperirea de măsură 1 cu astfel de pătrate de latură 2^k (chiar o omotetie a planului laticial). Plasăm în fiecare pătrat de latură 2^k al acestei acoperiri figura F corespunzătoare. Asociem pătrăţelelor unitate ale pătratului de latură 2^k valoarea 1 dacă pătrăţelul este în F şi 0 altfel. Cu alte cuvinte am făcut o primă acoperire a planului cu figuri F. Vom face o serie de paşi.

Primul pas: Considerăm acoperirea obţinută ca mai sus, dar înlocuind figura F cu simetrica ei faţă de $(Oy$, astfel încât această acoperire să suprapună seturile de pătrate de latura 2^k peste cele considerate anterior. Fie F' noua figură obţinută din suprapunerea celor două acoperiri (reuniunea) şi considerarea modulo 2 (un pătrăţel are asociat 1 dacă este acoperit de un număr impar de plantaţii şi 0 altfel). Procedăm analog cu F' dar faţă de axa $(Ox$. Obţinem o nouă figură F'', care este simetrică şi faţă de orizontală şi faţă de verticală, încadrată în pătratul de latură 2^k. Să observăm că fiecare pătraţel a fost acoperit de cel mult 4 ori.

Realizăm acoperirile determinate de translaţii ale acoperirii de mai sus cu figura F'', de vectori $2^{k-1}\overline{i}$, $2^{k-1}\overline{j}$, $2^{k-1}\overline{i} + 2^{k-1}\overline{j}$.

Să considerăm reuniunea celor 4 acoperiri. Privind mai atent, observăm că am obţinut astfel o nouă acoperire cu pătrate de latură 2^{k-1}, cu o figură $F(2)$ în fiecare pătrat, simetrică orizontal şi vertical. Acest proces reprezintă de fapt echivalentul primei părţi, întrucât acoperim figura din pătratul de latură 2^{k-1} cu simetrica ei faţă de axa verticală şi apoi cu simetricele faţă de axa orizontală a celor două figuri obţinute. Fiecare pătrat a fost acoperit de cel mult $4+4+4+4 = 4 \cdot 4$ ori.

Putem continua acum cu următorii paşi analogi cu partea a doua a pasului 1 (partea cu translaţiile) pănă ajungem la acoperirea cu pătratul de latura 1, care are în interiorul lui figura $F(k+1)$, care poate fi ori mulţimea vidă ori însuşi pătrăţelul, caz în care am obţinut o 2-acoperire impară a planului cu F (şi o măsură de cel mult $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4 = 4^k$).

Pentru a determina numărul la care ajungem (0 sau 1) în $F(k+1)$, vom considera aceeaşi serie de paşi ca mai sus, urmărind în acelaşi timp cum evoluează suma tuturor valorilor asociate pătrăţelelor interiorului pătratului de latură 2^k.

Să presupunem că am considerat pătratul de vârfuri $[1,1]$, $[1,2^k]$, $[2^k,1]$, $[2^k,2^k]$ (ne referim aici la cele 4 pătrate unitare) şi fie $a_{i,j} = 1$ dacă pătratul $[i,j]$ este în figura F şi 0 altfel.

Vom da acum un exemplu de "paşi" făcuţi ca mai sus:

Exemplul 4.

1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0

$\longrightarrow$

0	1	1	0
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0

$\longrightarrow$

0	0	0	0
0	1	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

$\longrightarrow$

1	1
1	1

Să notăm $b_{i,j}$, $i = \overline{1, 2^{k-1}}$, $j = \overline{1, 2^{k-1}}$ valorile asociate acoperirii rezultate din suma celor 4 acoperiri (fără a le reduce modulo 2; adunăm $a_{i,j}$-urile corespunzătoare pentru a proba dacă $[i,j]$ este sau nu în $F(2)$). Acum este uşor să observăm că $b_{i,j} = a_{i,j} + a_{i,2^k+1-j} + a_{2^k+1-i,j} + a_{2^k+1-i,2^k+1-j}$. Dar aceasta înseamnă că :

$$\sum_{\substack{i \le 2^{k-1} \\ j \le 2^{k-1}}} b_{i,j} = \sum_{\substack{i \le 2^{k-1} \\ j \le 2^{k-1}}} \left(a_{i,j} + a_{i,2^k+1-j} + a_{2^k+1-i,j} + a_{2^k+1-i,2^k+1-j}\right) = \sum_{\substack{i \le 2^k \\ j \le 2^k}} a_{i,j}$$

Am demonstrat prin aceasta că suma valorilor asociate rămâne aceeaşi. Cu alte cuvinte, valoarea din ultimul pătrat după ultimul pas este egală cu suma valorilor iniţiale ale figurii F. Deci, dacă figura F are un număr impar de pătrăţele, atunci figura $F(k+1)$ este constituită dintr-un pătrăţel, adică avem o acoperire a planului.

Dar nu am obţinut acelaşi lucru în demonstraţia 1 şi mult mai uşor?

Ba da, dar demonstraţia 1 nu ne perminte o rafinare pentru a o face să funcţioneze şi pe figuri de cardinal par, pe când aceasta da.

Dacă la sfârşit nu obţinem un pătrăţel, ci mulţimea vidă, rezultă că la un moment dat, după o simetrizare, figura s-a anulat pe sine însăşi. Dar aceasta nu se întâmplă decât în cazul în care figura era deja simetrică faţă de axa faţă de care s-a făcut simetria. Dar suprimând această etapă din pasul corespunzător putem continua operaţiile de simetrizare, întrucât figura e deja simetrică faţă de acea axă. Suprimând toate etapele în care am face o astfel de simetrie nedorită, ne păstrăm pe linia raţionamentului anterior şi, mai mult, putem fi siguri că ajungem la o figură unitară nevidă. Să considerăm, de exemplu, ultimul pas, plecând de la cele 16 posibilităţi şi suprimând acele simetrii care nu sunt favorabile.

Exemplul 5. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow$ STOP

Exemplul 6. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow$ STOP

Exemplul 7. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow$ STOP

Exemplul 8. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow$ STOP

Exemplul 9. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \longrightarrow$ STOP

Nu este greu de observat că fără a suprima nici o simetrizare avem exact 4^k plantaţii peste fiecare pătrăţel. Acest număr reprezintă toate pătrăţelele pătratului $2^k \times 2^k$, deci ne furnizează o măsură mai mare decât cea furnizată de demonstraţia 1 pentru figuri de cardinal impar. Pentru cardinal par în schimb, putem considera această măsură ca un bun majorant pentru valoarea minimă posibilă a măsurii. Chiar mai mult, ţinând cont că am suprimat cel puţin o etapă, înseamnă că nu am mai dublat în momentul acela măsura, deci obţinem cel mult $2 \cdot 4^{k-1}$ care pentru figuri de ajuns de compacte şi de bine încadrate în pătratul de latură 2^k corespunzător poate fi chiar mai mic decât cardinalul plantaţiei.

Problemă. Colorăm planul în alb şi negru ca tabla de şah. Fie o plantaţie pentru care numărul de pătrăţele albe pe care le conţine, A, este impar şi numărul de pătrăţele negre pe care le conţine, B, este tot impar. Să se gasească o acoperire a planului cu figura reprezentată de această plantaţie cu măsura egală cu $\max(A, B)$.

Conjenctură. Putem acoperi modulo 2 planul cu translaţii ale unei aceleeaşi plantaţii, oricare ar fi aceasta. Mai mult, măsura obţinută poate fi mai mică decât cea dată de demonstraţia 2 şi chiar decât cardinalul plantaţiei.

Un început de demonstraţie pentru conjenctură este sugerat de problema anterioară.