Asupra unei probleme de concurs

Alexandru NEGRESCU[1]

La cea de-a VI-a ediţie a *Concursului interjudeţean de matematică "Radu Miron"*, care a avut loc la Vaslui în perioada 5 - 7 noiembrie 2004, a fost propusă elevilor de clasa a X-a următoarea problemă:

Dacă A, B, C sunt măsurile unghiurile unui triunghi, atunci

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq 2\sqrt{3}.$$

Precizaţi când are loc egalitatea.

Vă prezentăm în continuare cinci soluţii pentru această inegalitate, lăsându-vă pe dumneavoastră să decideţi care este cea mai frumoasă.

Soluţia I (prezentată în baremul de corectare). Deoarece $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ sunt strict pozitive, avem

$$\left(\sum \sin A\right)\left(\sum \frac{1}{\sin A}\right)\geq 9 \quad \text{sau} \quad \sum \frac{1}{\sin A}\geq \frac{9}{\sum \sin A}.$$

Conform *inegalităţii Cauchy - Buniakowski - Schwarz*, avem

$$\left(\sum \sin A\right)^2\leq 3\sum \sin^2 A=3\sum \frac{1-\cos 2A}{2}=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\sum \cos 2A.$$

Cum

$$\sum \cos 2A=2\cos^2 C-1-2\cos\left(A-B\right)\cos C=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(2\cos C-\cos\left(A-B\right)\right)^2+\sin^2\left(A-B\right)-3\right]\geq -\frac{3}{2},$$

rezultă că

$$\left(\sum \sin A\right)^2\leq \frac{9}{2}+\frac{9}{4}=\frac{27}{4} \quad \text{sau} \quad \sum \sin A\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Combinând rezultatele precedente obţinem $\sum \frac{1}{\sin A}\geq 9\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$, adică inegalitatea dorită. Se constată uşor că egalitatea are loc dacă şi numai dacă triunghiul este echilateral.

Soluţia a II-a (Alexandru Negrescu). Conform teoremei sinusurilor, avem: $\sin A=\frac{a}{2R}$ etc. Inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{2R}{a}+\frac{2R}{b}+\frac{2R}{c}\geq 2\sqrt{3}\Leftrightarrow R\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\sqrt{3}\Leftrightarrow \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\sqrt{3}R.$$

Cum $3/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq\frac{a+b+c}{3}=\frac{2p}{3}$, rămâne să arătăm că $\frac{2p}{3}\leq\sqrt{3}R$ sau $p\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}R$, ceea ce este o cunoscută inegalitate a lui Mitrinović.

---

[1] Elev, cl. a X-a, Colegiul Naţional "August Treboniu Laurean", Botoşani

Soluţia a III-a (Alexandru Negrescu şi prof. **Liliana Tomiţa).** Conform inegalităţii mediilor avem

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}}.$$

Ştim că $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ([**1**], pag. 123-124), cu egalitate pentru triunghiul echilateral. Înlocuind mai sus, obţinem

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq 3\Big/\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}=3\Big/\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$$

Soluţia a IV-a (Alexandru Ţurcanu şi **Şerban Vatavu**, elevi, C.N. "M. Eminescu", Botoşani**).** Conform inegalităţii mediilor, avem

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq\frac{9}{\sin A+\sin B+\sin C}.$$

Dar, conform *inegalităţii lui Jensen* pentru funcţii concave are loc

$$\sin\frac{A+B+C}{3}\geq\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\quad\text{sau}\quad\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

care, înlocuită în relaţia precedentă, conduce la inegalitatea dorită.

Soluţia a V-a (Alexandru Negrescu). Ridicând relaţia din enunţ la pătrat, obţinem

$$\sum\frac{1}{\sin^2 A}+2\sum\frac{1}{\sin A\cdot\sin B}\geq 12$$

sau

$$\sum\frac{1}{\sin^2 A}+2\,\frac{\sum\sin A}{\prod\sin A}\geq 12. \qquad (*)$$

Cu inegalitatea mediilor şi ţinând seama că $\prod\cos A\leq\frac{1}{8}$, rezultă că

$$\sum\frac{1}{\sin^2 A}\geq\frac{9}{\sum\sin^2 A}=\frac{9}{2+2\prod\cos A}\geq\frac{9}{2+2\cdot\frac{1}{8}}=4.$$

Pe de altă parte, cu inegalitatea mediilor şi ţinând seama că $\prod\sin A\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$, avem şi

$$2\,\frac{\sum\sin A}{\prod\sin A}\geq\frac{2\cdot 3\sqrt[3]{\prod\sin A}}{\prod\sin A}=\frac{6}{\sqrt[3]{\left(\prod\sin A\right)^2}}\geq 6\Big/\sqrt[3]{\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2}=8.$$

Prin adunare, obţinem inegalitatea $(*)$, care este echivalentă cu cea de demonstrat.

Bibliografie

1. **T. Cohal** - *Probleme de trigonometrie*, Editura Moldova, Iaşi, 1994.
2. **M. Ganga** - *Manual pentru clasa a IX-a, profil M1, M2*, Editura Mathpress, Ploieşti, 2003.
3. **M. Ganga** - *Manual pentru clasa a X-a, profil M1*, Editura Mathpress, Ploieşti, 2003.