Asupra unei inegalităţi condiţionate

Cezar LUPU [1]

La OBM - 2001 a fost dată problema următoare:

Fie a, b, c numere reale strict pozitive astfel încât $a+b+c \geq abc$. Să se arate că $a^2+b^2+c^2 \geq abc\sqrt{3}$. **Cristinel Mortici, România**

Soluţia autorului utilizează metoda reducerii la absurd. Presupunem că are loc inegalitatea contrară, adică $a^2+b^2+c^2 < abc\sqrt{3}$. Aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz, obţinem $abc\sqrt{3} > a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq \frac{1}{3}(abc)^2$, de unde $abc < 3\sqrt{3}$. Pe de altă parte, aplicând inegalitatea mediilor, avem $abc\sqrt{3} > a^2+b^2+c^2 \geq$ $\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ şi, deci, $abc > 3\sqrt{3}$. Se obţine astfel o contradicţie.

Alte soluţii ale acestei probleme sunt prezentate în [**1**] şi [**2**].

1. Problema de mai sus poate fi întărită astfel:

Problema 1. *Să se arate că, dacă $a, b, c > 0$ şi $a+b+c > abc$, atunci $ab+bc+ca \geq abc\sqrt{3}$.*

Soluţia I. Ipoteza şi concluzia se pot scrie în felul următor: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac} \geq 1$ şi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$. Utilizăm binecunoscuta inegalitate $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (1) pentru a obţine $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)$, din care rezultă că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$.

Soluţia II. Inegalitatea cerută rezultă direct din inegalitatea $ab+bc+ca \geq$ $\geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+$ (2) (aceasta se reduce la (1), dacă notăm $x = ab$, $y = bc$ şi $z = ca$).

Problema 2. *Se consideră $a, b, c > 0$ astfel încât $a+b+c \geq abc$. Să se arate că* $\frac{bc}{a^2(b+c)}+\frac{ca}{b^2(c+a)}+\frac{ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Cezar Lupu**

Soluţie. Pentru prescurtarea scrierii folosim însumarea ciclică $\sum$. Avem

$$\sum \frac{bc}{a^2(b+c)} = \frac{1}{abc}\sum \frac{(bc)^2}{a(b+c)} \geq \frac{1}{abc}\cdot\frac{(bc+ca+ab)^2}{2(bc+ca+ab)} = \frac{ab+bc+ca}{2abc} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(s-a folosit $(bc+ca+ab)^2 \leq 2(bc+ca+ab)\sum \frac{(bc)^2}{a(b+c)}$, adevărată conform inegalităţii Cauchy-Schwarz).

2. Având ca punct de plecare inegalitatea condiţionată dată la OBM, se pot obţine inegalităţi geometrice într-un triunghi. Să observăm mai întâi că avem:

Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare înscris într-un cerc de rază egală cu unitatea, atunci $a+b+c \geq abc$.

În [**2**] sunt date patru demonstraţii. Reproducem una dintre ele. Formulele $4RS = abc$ şi $S = pr$ conduc la relaţia $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$. Utilizând inegalitatea lui Euler şi faptul că $R = 1$, obţinem inegalitatea dorită.

[1] Elev, cl. a X-a, Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân", Constanţa

Ca urmare, în condiţia impusă triunghiului, are loc şi inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \geq abc\sqrt{3}$. De altfel, aceasta din urmă rezultă direct din cunoscuta inegalitate $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ (*Weitzenböck*, 1919) pentru $R=1$.

O întărire a acestor inegalităţi este dată de

Problema 3. *În orice triunghi este satisfăcută inegalitatea* $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq 4S\sqrt{3}$. *În particular, dacă* $R=1$, *avem* $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq abc\sqrt{3}$.

Soluţie. Prima parte a dublei inegalităţi se dovedeşte astfel: $\sum ab \geq \sum a\sqrt{bc} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}} \Leftrightarrow A^2+B^2+C^2 \geq AB+BC+CA$ (s-a notat $A=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $B=\frac{1}{\sqrt{b}}$ şi $C=\frac{1}{\sqrt{c}}$), care este adevărată.

Demonstrăm acum partea a doua, adică $\sum a\sqrt{bc} \geq 4S\sqrt{3}$ sau $\sum \frac{1}{\sqrt{bc}} \geq \frac{\sqrt{3}}{R}$. Cu inegalitatea Cauchy-Schwarz sau utilizând inegalitatea (2) de mai sus, obţinem $\sum \frac{1}{\sqrt{bc}} \geq \frac{9}{\sum \sqrt{bc}} \geq \frac{9}{\sqrt{3\,(ab+bc+ca)}}$. Este suficient ca $\frac{9}{\sqrt{3\,(ab+bc+ca)}} \geq \frac{\sqrt{3}}{R}$ sau, echivalent, $ab+bc+ca \leq 9R^2$. Aceasta decurge din $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ şi faptul cunoscut că într-un triunghi are loc $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$.

Problema 4. *Să se arate că în orice triunghi înscris într-un cerc de rază egală cu 1 are loc inegalitatea* $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\sqrt{3} \leq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. **Cezar Lupu**

Soluţie. Este binecunoscută inegalitatea $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+ (b-c)^2+(c-a)^2$ (*Finsler* şi *Hadwiger*, 1938). Este echivalentă cu $2\,(ab+bc+ca) - \left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 4S\sqrt{3}$ şi ţinând seama că $R=1$, conduce la inegalitatea cerută.

Problema 5. *În orice triunghi înscris într-un cerc de rază* 1 *are loc următoarea inegalitate:* $\frac{a}{bc\,(b+c)}+\frac{b}{ca\,(c+a)}+\frac{c}{ab\,(a+b)} \geq \frac{3}{2\,(a+b+c)}$. **Cezar Lupu**

Soluţie. Utilizând rezultatul din Problema 3 şi inegalitatea Cauchy-Schwarz, putem scrie: $\frac{3a^2b^2c^2}{2\,(a+b+c)} \leq \frac{(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab})^2}{2\,(a+b+c)} \leq \sum \frac{(a\sqrt{bc})^2}{b+c}$, de unde, prin împărţire cu $a^2b^2c^2$, obţinem inegalitatea dorită.

3. Propunem spre rezolvare următoarele probleme:

1. Se consideră a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel încât $a+b+c \geq abc$. Arătaţi că $\frac{a^2}{bc\,(b+c)}+\frac{b^2}{ca\,(c+a)}+\frac{c^2}{ab\,(a+b)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **Cezar Lupu, G.M.**

2. Fie ABC un triunghi oarecare înscris într-un cerc de rază egală cu 1. Arătaţi că $PA+PB+PC \geq \frac{\sqrt{3}}{3} AB \cdot BC \cdot CA$, $\forall P \in \operatorname{Int}(ABC)$. **Cezar Lupu**

Bibliografie

1. M. Bălună şi M. Becheanu (prezentare de) - *A 18-a OBM, 3-9 mai 2001, Belgrad*, GM - 5-6/2001, 229-236.

2. Cezar Lupu - *Asupra unei probleme de concurs*, Rev. Mate(matică), 2003, 17-20.