Asupra unei ecuaţii funcţionale

Loredana AGORE[1]

Scopul acestei note este rezolvarea ecuaţiei funcţionale

$$f(axy+x+y)=bf(x)f(y)+c[f(x)+f(y)]+d \quad (a,b,c,d\in\mathbb{R}) \qquad (1)$$

în mulţimea funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sau $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ sau $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$.

În ecuaţia (1) este cuprinsă *ecuaţia lui Cauchy*

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \qquad (2)$$

ale cărei soluţii se numesc *funcţii aditive*, precum şi următoarele *ecuaţii clasice* ce sunt reductibile la ecuaţia lui Cauchy:

$$f(x+y)=f(x)f(y), \qquad (3)$$

$$f(xy)=f(x)+f(y), \qquad (4)$$

$$f(xy)=f(x)f(y). \qquad (5)$$

Rezolvarea în detaliu a ecuaţiilor (2) – (5) se poate găsi în [**1**]. Tot în [**1**], p. 23, este studiată şi ecuaţia funcţională obţinută considerând în (1) $a\geq 0$, $c=1$, $d=0$.

Rezolvarea ecuaţiei funcţionale (1) constă în reducerea ei, potrivit cu parametrii a, b, c şi d, la una dintre ecuaţiile (2) – (5). Distingem câteva cazuri.

I $a\neq 0$, $b\neq 0$. Înmulţim ecuaţia (1) cu b şi apoi punem rezultatul obţinut sub forma

$$bf\left(\frac{(ax+1)(ay+1)-1}{a}\right)+c=\left[bf\left(\frac{(ax+1)-1}{a}\right)+c\right]\cdot$$
$$\cdot\left[bf\left(\frac{(ay+1)-1}{a}\right)+c\right]+bd+c-c^2. \qquad (6)$$

Cu notaţiile $\alpha=bd+c-c^2$, $u=ax+1$, $v=ay+1$ şi $g(t)=bf\left(\frac{t-1}{a}\right)+c$, $t\in\mathbb{R}$, ecuaţia (6) se scrie

$$g(uv)=g(u)g(v)+\alpha. \qquad (7)$$

Dacă $bd=c^2-c$, adică $\alpha=0$, atunci (7) este de tipul (5) şi se reduce la ecuaţia lui Cauchy [**1**]. Soluţiile se exprimă cu funcţiile aditive sau sunt funcţii constante.

Dacă $bd\neq c^2-c$, deci $\alpha\neq 0$, luăm $u=v=1$ în (7) şi obţinem $g(1)=[g(1)]^2+\alpha$. De aici, $g(1)=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{1-4\alpha}\right]=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{(1-2c)^2-4bd}\right]$, cu condiţia ca $\alpha\leq\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow bd\leq c^2-c+\frac{1}{4}$. Pe de altă parte, ecuaţia (7) cu $v=1$ devine

$$g(u)=g(u)g(1)+\alpha\Leftrightarrow g(u)=\frac{\alpha}{1-g(1)}\Leftrightarrow g(u)=g(1)$$

(evident, $g(1)\neq 1$). Ca urmare, ecuaţia (1) are, în cazul considerat, două soluţii date de $f(x)=\frac{1}{b}[g(1)-c]=\frac{1}{2b}\left[(1-2c)\pm\sqrt{(1-2c)^2-4bd}\right]$.

[1] Elevă, cl. a XI-a, Colegiul Naţional "Mihai Viteazul", Bucureşti

II $a = 0$, $b \neq 0$. Ecuaţia (1) devine

$$f(x+y) = bf(x) f(y) + c[f(x) + f(y)] + d \tag{8}$$

şi se poate scrie în forma

$$bf(x+y) + c = [bf(x) + c][bf(y) + c] + bd + c - c^2 \tag{9}$$

sau, notând $\alpha = bd + c - c^2$ şi $g(t) = bf(t) + c$, $t \in \mathbb{R}$,

$$g(x+y) = g(x) g(y) + \alpha. \tag{10}$$

Dacă $bd = c^2 - c$, atunci (10) este de tipul (3) etc.

Dacă $bd \neq c^2 - c$, în (8) luăm $x = y = 0$ şi obţinem $f(0) = b[f(0)]^2 + 2cf(0) + d \; (*)$, deci $f(0) = \dfrac{1}{2b}\left[(1-2c) \pm \sqrt{(1-2c)^2 - 4bd}\right]$ (în mod necesar, $(1-2c)^2 - 4bd \geq 0$ $\Leftrightarrow 1 - 4\alpha \geq 0$). Dar, dacă în (8) luăm $y = 0$ şi apoi grupăm convenabil, avem

$$[1 - bf(0) - c] f(x) = cf(0) + d \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow [1 - bf(0) - c] f(x) = [1 - bf(0) - c] f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0)$$

$(1 - bf(0) - c \neq 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} bd \neq c^2 - c)$. Avem două soluţii:

$$f(x) = f(0) = \frac{1}{2b}\left[(1-2c) \pm \sqrt{(1-2c)^2 - 4bd}\right].$$

III $a \neq 0$, $b = 0$. În acest caz, (1) se scrie

$$f(axy + x + y) = c[f(x) + f(y)] + d. \tag{11}$$

Dacă $c = 1$, punem (11) în forma

$$f\left(\frac{(ax+1)(ay+1) - 1}{a}\right) + d = \left[f\left(\frac{(ax+1) - 1}{a}\right) + d\right] + \left[f\left(\frac{(ay+1) - 1}{a}\right) + d\right]$$

sau, notând $u = ax + 1$, $v = ay + 1$ şi $g(t) = f\left(\dfrac{t-1}{a}\right) + d$, $t \in \mathbb{R}$,

$$g(uv) = g(u) + g(v),$$

care este o ecuaţie de tipul (4).

Dacă $c \neq 1$, pentru $x = y = 0$ luat în (11) obţinem

$$f(0) = 2cf(0) + d \Leftrightarrow (1-2c) f(0) = d. \tag{12}$$

Cum, pentru $y = 0$ în (11), avem

$$f(x) = cf(x) + cf(0) + d \overset{(12)}{\Leftrightarrow} f(x) = cf(x) + f(0) - cf(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-c) f(x) = (1-c) f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0) \overset{(12)}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{d}{1-2c}$$

dacă mai presupunem în plus $c \neq \dfrac{1}{2}$. Este banală verificarea faptului că, în condiţiile impuse, $f(x) = \dfrac{d}{1-2c}$ este soluţie a ecuaţiei (11).

Dacă $c = \dfrac{1}{2}$, avem de rezolvat ecuaţia

$$f(axy + x + y) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] + d. \tag{13}$$

Pentru $x = y = 0$, obţinem $f(0) = \frac{1}{2}[f(0) + f(0)] + d$, deci $d = 0$. Luând acum $y = -\frac{1}{a}$ în (13) cu $d = 0$, vom avea $f(0) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f\left(\frac{-1}{a}\right)\right]$, de unde rezultă că $f(x) = k$ (constant), $\forall x \in \mathbb{R}$. Se verifică uşor că această funcţie este într-adevăr soluţie pentru orice $k \in \mathbb{R}$.

IV $a = 0$, $b = 0$. Este vorba de ecuaţia

$$f(x+y) = c[f(x) + f(y)] + d. \tag{14}$$

Dacă $c = 1$, (14) se poate scrie

$$f(x+y) + d = [f(x) + d] + [f(x) + d],$$

care este o ecuaţie Cauchy în $g(t) = f(t) + d$, $t \in \mathbb{R}$.

Dacă $c \neq 1$, luăm $x = y = 0$ în (14) şi obţinem, ca şi în cazul precedent, relaţiile echivalente (12). Se continuă tot ca în cazul amintit şi se obţine soluţia $f(x) = f(0) = \frac{d}{1-2c}$, $x \in \mathbb{R}$, dacă $c \neq \frac{1}{2}$.

Dacă $c = \frac{1}{2}$, (14) se scrie

$$f(x+y) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] + d. \tag{15}$$

Luând $x = y = 0$, constatăm că $d = 0$. Punând în (15) $d = 0$ şi fixând $y = 0$, obţinem $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(0)]$. Deci $f(x) = f(0) = \text{constant}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, funcţie ce este soluţie a ecuaţiei (15).

Bibliografie

1. **V. Pop** - *Ecuaţii funcţionale. Ecuaţii clasice şi probleme*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2002.

Recreaţii ... matematice

2. Un călător, care nu avea la el decît un lanţ cu şapte verigi de aur, poposeşte într-o zi la un han. El se înţelege cu hangiul să-l plătească pentru fiecare zi petrecută la han câte o verigă de aur. Dacă stă şapte zile şi plata trebuie făcută în fiecare zi, care este numărul minim de tăieturi care trebuie făcute în lanţ pentru a putea plăti preţul convenit? (Se acceptă ca, atunci când este cazul, hangiul să dea călătorului ca rest un număr de verigi (posibil toate!) pe care le-a primit deja.)

3. Care este eroarea în "demonstraţia" de mai jos a egalităţii $3 = 0$?

$x^2 - x + 1 = 0 \quad \vert \cdot x$	$x^3 - (-1) = 0$
$x^3 - x^2 + x = 0$	$x^3 = -1$
$x^3 - (x^2 - x) = 0$	$x = -1$

Punând $x = -1$ în $x^2 - x + 1 = 0$, obţinem $3 = 0$.

Notă. Soluţiile problemelor 2 şi 3 se pot găsi la pagina 39.