NOTA ELEVULUI

Asupra unei probleme de construcţie

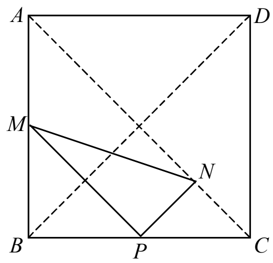
Anca TIMOFTE, Alexandru ŢURCANU[1]

Punctul de plecare al acestei note a fost una dintre problemele propuse spre rezolvare absolvenţilor clasei a VII-a în cadrul **Concursului "Recreaţii Matematice"** din 27 august 2002. Enunţul acestei probleme este următorul:

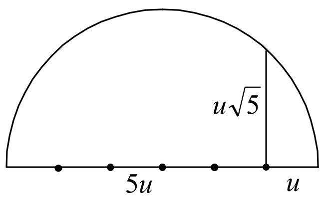
Fie dat un segment $[MN]$*. Construiţi cu rigla şi compasul un pătrat* $ABCD$ *astfel încât* $M \in [AB]$*,* $AM = MB$*, iar* $N \in [AC]$*,* $AN = 3NC$*. (Descrieţi toate construcţiile care trebuie efectuate.)* (**Gabriel Popa**)

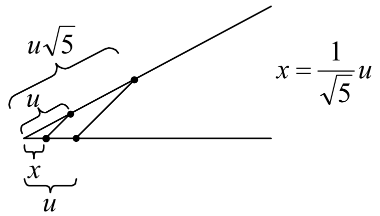
Prezentăm în continuare soluţia dată de autorul problemei, aşa cum a reieşit din baremul de corectare:

Soluţia 1. *Să presupunem problema rezolvată* şi fie P mijlocul segmentului $[BC]$. Atunci $NP \| BD$, $PM \| AC$ (ca linii mijlocii), deci $NP \perp MP$ şi $m(\widehat{MPB}) = 45°$. Dacă a este lungimea laturii pătratului, atunci $MP = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $NP = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, deci $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, de unde $NP = \dfrac{1}{\sqrt{5}}MN$.



Construcţia. Vom lua ca unitate un segment u de lungime egală cu cea a segmentului $[MN]$.





Ca în figurile de mai sus, construim un segment de lungime $\dfrac{1}{\sqrt{5}}u$. Intersectăm cercul de diametru $[MN]$ cu cercul de centru N şi rază $\dfrac{1}{\sqrt{5}}u$, obţinând punctul P. Construim triunghiul dreptunghic isoscel de ipotenuză $[MP]$ şi aflăm astfel vârful B al pătratului. Apoi, A şi C sunt simetricele lui B faţă de M, respectiv P. Vârful D se obţine ca intersecţie a paralelelor duse prin A şi C la BC, respectiv AB.

Demonstrarea faptului că $ABCD$ astfel determinat este pătrat cu proprietăţile dorite, este imediată. Evident că problema are soluţie, unică până la o izometrie a planului.

Vom da mai jos încă două soluţii ale acestei probleme. Prima are avantajul că nu foloseşte nici un punct auxiliar; este însă necesară o bună cunoaştere a construcţiilor

[1] Elevi, Şcoala nr.7 "Octav Băncilă", Botoşani

cu rigla şi compasul. A doua are la bază un raţionament mai elaborat, dar utilizează numai construcţii la nivelul manualelor.

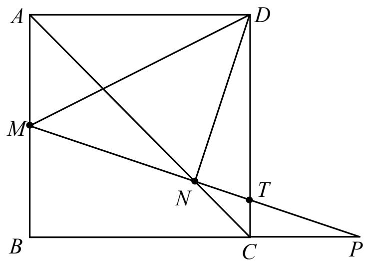
Soluţia 2. Pe figura şi notaţiile din prima soluţie, aplicăm teorema cosinusului în $\triangle AMN$:

$$\begin{aligned} MN^2 &= AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos(\widehat{MAN}) = \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2}{8}, \end{aligned}$$

deci $a = \dfrac{2\sqrt{10}}{5} MN$.

Rezultă următoarea *construcţie*: determinăm un segment de lungime $a = \dfrac{2\sqrt{10}}{5} u$, unde $u = MN$. Vârful A al pătratului este la intersecţia arcului capabil de 45° construit pe $[MN]$ drept coardă, cu cercul de centru M şi rază $\dfrac{a}{2}$. Aflăm apoi B ca fiind simetricul lui A faţă de M etc.

Soluţia 3. *Presupunem problema rezolvată* şi aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle ABC$ cu transversala $M - N - P$; obţinem:



$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{BP}{PC} = 3 \ \Rightarrow \ BC = 2PC.$$

Aplicând acum Menelaus în $\triangle MNP$ cu transversala $C - N - A$, găsim:

$$\frac{PC}{CB} \cdot \frac{BA}{AM} \cdot \frac{MN}{NP} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{MN}{NP} = 1 \ \Rightarrow \ MN = NP.$$

Să observăm că $\triangle DAM \equiv \triangle DCP$ (C.C.), de unde $MD = DP$ şi $\widehat{ADM} \equiv \widehat{CDP}$. Ultima relaţie arată că

$$m(\widehat{MDP}) = m(\widehat{MDC}) + m(\widehat{CDP}) = m(\widehat{MDC}) + m(\widehat{ADM}) = m(\widehat{ADC}) = 90^\circ,$$

aşadar $\triangle MDP$ este dreptunghic isoscel. Fie $\{T\} = MP \cap CD$; teorema fundamentală a semănării aplicată în $\triangle PBM$ cu $CT \| BM$ arată că $\dfrac{PT}{PM} = \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{1}{3}$.

Construcţia. Aflăm P ca simetric al lui M faţă de N. Intersectăm cercul de diametru $[MP]$ cu mediatoarea acestui segment, determinând vârful D al pătratului. Aflăm punctul $T \in [MP]$ care împarte segmentul în raportul $\dfrac{PT}{PM} = \dfrac{1}{3}$, apoi fie C intersecţia dreptei DT cu semicercul de diametru $[DP]$ aflat în semiplanul delimitat de dreapta DP ce conţine punctul N. Vârfurile A şi B ale pătratului se construiesc acum cu uşurinţă.

Observaţie. Problema se poate generaliza considerând că punctele M şi N sunt luate astfel încât $AM = m\,MB$ şi $AN = n\,NC$.